METRON esce in quattro numeri all' anno, che costituiscono complessivamente un volume di 700 - 800 pagine.

METRON accoglie articoli originali di metodologia statistica e di applicazioni statistiche alle varie discipline e rassegne o discussioni di risultati raggiunti col metodo statistico in diversi campi della scienza o tali da poter interessare il cultore della statistica. Pubblica altresì una bibliografia di tutte le opere e riviste ricevute in omaggio od in cambio.

Articoli e rassegne potranno essere scritti in italiano, francese, inglese o tedesco. I manoscritti in lingua francese, inglese o tedesca dovranno essere dattilografati. Gli autori riceveranno gratuitamente 25 estratti dei lavori pubblicati.

I manoscritti per la pubblicazione dovranno essere indirizzati al *Prof. Corrado Gini. R. Università di Padova - Gabinetto di Statistica*, oppure al membro del Consiglio direttivo che rappresenta lo Stato a cui l'autore appartiene. Gli autori sono pregati di conservare copia del manoscritto inviato, poichè, nel caso che questo non venga pubblicato, la Direzione non ne garantisce la restituzione.

Al Prof. Corrado Gini dovranno pure essere indirizzate le richieste di cambi da parte di riviste o di altri periodici e ogni pubblicazione inviata in cambio od in omaggio.

Le richieste di abbonamento dovranno invece essere indirizzate alle *Industrie Grafiche Italiane - Rovigo (Veneto).*

Il prezzo di abbonamento è di **lire 50 all'anno.** Il prezzo di un fascicolo è di **lire 15.**

METRON parait en quatre fascicules par an formant en tout un volume de 700 - 800 pages.

METRON publie des articles de méthodologie statistique et d'applications statistiques aux différentes disciplines ainsi que des revues ou des discussions des résultats obtenus par la méthode statistique dans toutes les sciences ou bien intéressant les savants qui s'occupent de statistique.

METRON publie aussi une bibliographie de tous les ouvrages et revues reçus comme hommage ou en échange

Les articles et les revues pourront être écrits en italien, en français, en anglais ou en allemand. Les manuscrits en français, en englais ou en allemand doivent être envoyès dactylographiés. On enverra gratis aux auteurs 25 copies tirées à part de leurs travaux après pubblication.

On doit adresser les manuscrits pour la publication à *M. le Prof. Corrado Gini, Gabinetto di Statistica, R. Università di Padova (Italie)*, ou bien au membre du conseil de direction compatriote de l'auteur. On prie les auteurs de garder une copie du manuscrit qu'ils adressent à la revue, puisque, en cas de non publication, la rédaction ne garantit pas de pouvoir le renvoyer.

Au Prof. Corrado Gini doivent aussi être adressées les requêtes de change de la part des revues et des autres périodiques ainsi que toutes les publications adressées en échange ou en hommage.

Les demandes d'abonnement doivent etre adressées aux *Industrie Grafiche Italiane - Rovigo (Veneto) - Italie.* Le prix d'abonnement est fixé à **50 lires** par an et le prix par fascicule est de **15 lires.**

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVUE OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE RUNDSCHAU

Vol. 1. N. 1. **1-VII-1920**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

INDUSTRIE GRAFICHE ITALIANE
Stabilimento di ROVIGO
1920

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

ARTIKEL DIE AN DIE RUNDSCHAU ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

ARTICLES RECEIWED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTURE ISSUES.

C. **Gini**. *Criteri direttivi per l' interpolazione e la perequazione delle serie statistiche.*

L. **Livi**. *Memoria e profitto nei ragazzi. Esperimento di statistica psicometrica sugli alunni delle scuole comunali di Modena.*

M. **Boldrini**. *Nuovi contributi alle ricerche sull' azione dell' ordine di nascita.*

P. **Medolaghi**. *La previsione statistica ed il calcolo delle probabilità. Nota preliminare.*

A. **Andreadès**. *De la population de Constantinoples sous les empereurs byzantins.*

F. **Savorgnan**. *La natimortalità negli anni di guerra.*

G. **Balducci**. *Sulla mortalità degli insegnanti elementari pensionati.*

W. **Weinberg**. *Methodologische Gesichtspunkte für die statistische Untersuchung der Vererbung bei* Dementia präcox.

PROGRAMMA

Una delle maggiori difficoltà che incontra lo statistico moderno è quella di tener dietro agli articoli che possono interessare i suoi studi. Questi provengono da scuole diverse e compaiono su atti di accademie e su riviste appartenenti alle più svariate discipline. Converrebbe consultare pubblicazioni di astronomia e di genetica e di eugenica, di economia politica e di fisica e di chimica, di scienza delle finanze e di storia, di diritto e di igiene e di medicina, di antropologia e di ingegneria e di scienze attuariali, di demografia e di fisiologia e di patologia e di psicologia, di matematiche pure e di biologia generale, e ancora di zoologia e di zootecnia e di botanica e di agronomia.

Il più delle volte si tratta — è vero — di articoli che non rappresentano nulla più che una applicazione al soggetto trattato di metodi ben noti: spesso anche — conviene riconoscere — i risultati raggiunti non hanno un particolare interesse al di là della disciplina in cui la trattazione rientra. Ma altre volte le cose stanno diversamente. Trattasi talora di articoli di metodologia statistica, che posseggono un interesse generale per ogni cultore della materia. Più spesso ancora vediamo, in occasione di applicazioni ad argomenti speciali, prospettate e risolte questioni metodologiche, messa in luce la portata di ipotesi insite in taluni procedimenti, verificata l'approssimazione di conclusioni teoriche, realizzati così in vari modi progressi, della cui conoscenza può avvantaggiarsi ogni ramo della statistica. Molte altre volte ancora i risultati di particolari indagini statistiche, se non hanno un interesse per tutti i cultori della statistica, lo hanno però, e grandissimo, per i cultori dei rami affini di questa disciplina; e così, per esempio, risultati statistici ottenuti nel campo dell'antropologia, della biologia generale, della zootecnia, della genetica, dell'eugenica, dell'igiene, della medicina, della patologia, delle scienze attuariali, dell'economia politica, della storia, possono interessare vivamente il demografo.

Chi, nello sforzo di dare alla propria coltura statistica la massima estensione possibile, abbia consuetudine con le pubblicazioni disparate che contengono lavori statistici, non tarda ad accorgersi dei gravi inconvenienti che derivano da questa mancanza di coordinazione del lavoro.

Materiali statistici preziosi, faticosamente raccolti e diligentemente criticati, spesso restano senza utilità per la scienza, esposti e manipolati come sono da persone non pratiche dei moderni metodi di elaborazione. Difficoltà tipografiche rendono poi per lo più impossibile di pubblicare i dati originali nella loro integrità, per modo che resta esclusa anche la possibilità che i competenti ne traggano il frutto che l'autore non seppe cogliere.

Altre volte sono discussioni lunghissime, inconcludenti — quando pure non concludono a rovescio — per trattare questioni, che conoscenze anche elementari di metodi noti avrebbero permesso di risolvere con poche parole e sicuramente.

Talvolta, ancora, si assiste — ed è questo, in fondo, il male minore — a riscoperte di verità e a reinvenzioni di metodi già raggiunti in altri campi della statistica. E, anche all'infuori di questi danni manifesti, quante volte, leggendo un autore, pure sagace e profondo conoscitore del suo campo d'indagine, non vien fatto di avvertire il profitto che egli avrebbe potuto ritrarre dalla conoscenza di lavori statistici pubblicati in periodici lontani dalla sua disciplina?

Nei limiti consentiti ad una rivista, *Metron* si propone di fare il primo passo per ovviare a questi inconvenienti. Esso si rivolge, pertanto, a tutti gli studiosi che nei campi e coi metodi più disparati coltivano la statistica, domandando ad essi di convergere i loro sforzi per il progresso della scienza. *Metron* mira ad essere per ora il loro organo di collegamento, per divenire a poco a poco un organo di coordinazione scientifica.

Conseguentemente con tali propositi, *Metron* resta aperto a tutte le tendenze metodologiche, da quelle che rifuggono da ogni procedimento che non sia alla portata anche delle persone di media coltura, a quelle che fanno consistere il progresso della statistica nell'accogliere in misura sempre più larga i più raffinati e sottili procedimenti delle matematiche superiori. Le une e le altre hanno effettivamente ragione di attuarsi per indagini particolari. Vi sono infatti problemi, a cui bastano, per essere risolti, i metodi più antichi dell'analisi statistica, diventati ormai patrimonio comune di ogni persona colta; ed altri invece ve ne sono, che non possono essere trattati senza il ricorso ai più ardui strumenti del calcolo. E, tra questi e quelli, vi è una gradazione insensibile di passaggi. Ora, problemi di tutti questi varî tipi possono avere un interesse per la scienza in generale e per la statistica in particolare. *Metron* pertanto li vedrà volontieri trattati coi metodi meglio rispondenti.

Certamente non si può tacere che il compito di collegamento che la rivista si propone sarà assolto tanto più agevolmente, quanto minore sarà il tecnicismo usato dagli autori e quanto più largo, conseguentemente, sarà il pubblico che delle loro indagini potrà prendere piena conoscenza. Perciò la Direzione vedrebbe con piacere che le questioni fossero sempre trattate coi mezzi più semplici consentiti dall'indole della materia.

Questa è, d'altra parte, solo l'espressione di un desiderio della Direzione e non una condizione per l'accettazione degli articoli. La Direzione non desidera forzare ad andare contro alla loro naturale propensione quegli autori che, pur di guadagnare in concisione e precisione di linguaggio o in raffinatezza di metodi, sono disposti a rinunciare a farsi intendere da una parte dei lettori.

Condizione essenziale per l'accettazione dei lavori è invece che questi portino un contributo, nel campo della metodologia o delle applicazioni statistiche, che abbia un qualche carattere di originalità e possa interessare una più o meno ampia cerchia di cultori della statistica. A seconda dell'interesse più o meno largo degli argomenti trattati, i lavori verranno inseriti nella rubrica degli articoli o in quella delle note. Molte volte, però, lo statistico perviene, nelle sue ricerche, a risultati singoli che, per quanto non bastino a formar materia di un articolo e neppure di una nota, pure possono offrire un interesse di curiosità scientifica, non solo, ma anche costituire un materiale che viene utilmente a integrare le lacune di altre ricerche. Risultati siffatti verranno pubblicati in una rubrica a parte.

Oltre all'elenco delle pubblicazioni ricevute, la rivista conterrà in ogni numero una o più rassegne di opere statistiche o di risultati statistici desunti da opere di carattere prevalentemente non statistico. Ogni rassegna riguarderà un particolare ramo della statistica, la statistica metodologica, ad esempio, oppure la statistica demografica, o la sanitaria, o l'antropometrica, o l'economica. Vi sarà ancora una rassegna delle fonti statistiche e una rassegna dei rami delle matematiche, che con la statistica hanno diretta attinenza (calcolo delle probabilità, interpolazione, ecc.). Potranno infine essere accolte discussioni sopra temi che abbiano per la statistica particolare interesse.

Metron è una rivista internazionale. Il fatto che essa viene stampata in Italia e che i redattori sono quindi, di necessità, in maggioranza, italiani, farà sì che probabilmente la lingua italiana vi abbia, specialmente sul principio, una parte maggiore delle altre lingue internazionali, la francese, l'inglese, la tedesca. Queste vi sono ammesse però in condizioni di assoluta parità. Spetta ai collaboratori delle altre nazioni di intensificare la loro partecipazione in modo da fare scomparire ogni differenza. La partecipazione più larga degli autori non italiani è nel desiderio della Direzione.

La Direzione.

PROGRAMME

Une des grandes difficultés que rencontre la statistique moderne est de suivre tous les travaux qui peuvent intéresser ses études. Ces travaux sont en effet l'oeuvre d'écoles diverses; les revues ou les comptes-rendus qui les publient appartiennent aux disciplines les plus variées. Il faut donc consulter des publications d'astronomie, de génétique, d'eugénique, d'économie politique, de physique, de chimie, de science des finances, d'histoire, de droit, d'hygiène, de médecine, d'anthropologie, de technologie, de sciences actuarielles, de démographie, de physiologie, de pathologie, de psychologie, de mathématiques pures, de biologie générale, et encore de zoologie, de zootechnie, de botanique, d'agronomie, etc..

Le plus souvent — il est vrai — on écrit des articles qui ne sont qu'une application, au sujet en question, de méthodes bien connues; souvent aussi, — il faut le reconnaître — les résultats obtenus n'ont pas d'intérêt spécial en dehors de la discipline dans laquelle rentre l'article. Mais, d'autres fois, les choses se passent différemment. Certains articles de méthodologie présentent un intérêt général pour tous ceux qui s'occupent de statistique. Plus souvent encore nous voyons que, dans l'application à des développements spéciaux, des questions méthodologiques sont présentées et résolues, la portée d'hypothèses contenues dans certaines analyses est mise en lumière, le degré d'approximation des conclusions théoriques se trouve vérifié; des progrès sont ainsi réalisés par des voies diverses, progrès dont la connaissance intéresse toutes les branches de la statistique. Plus souvent encore, les résultats d'enquêtes statistiques particulières, bien que n'ayant pas d'intérêt pour tous ceux qui s'occupent de la statistique, offrent un intérêt considérable pour ceux qui s'occupent de recherches liées à ces enquêtes: c'est ainsi, par exemple, que les résultats statistiques obtenus dans le champ de l'anthropologie, de la biologie générale, de la zootechnie, de la génétique, de l'eugénique, de l'hygiène, de la médecine, de la pathologie, de la science actuarielle, de l'économie politique, de l'histoire, peuvent intéresser vivement le démographe.

Quiconque s'efforce de donner à sa connaissance spéciale de la statistique le maximum d'extension possible, en se servant des publications disparates qui contiennent des travaux statistiques, ne tarde pas à apercevoir les graves inconvénients qui dérivent de ce manque de coordination du travail.

Des données statistiques précieuses, recueillies avec peine, soigneusement critiquées, restent souvent sans utilité pour la science parce qu'elles sont présentées et mises en oeuvre par des personnes qui ne pratiquent pas les méthodes modernes d'élaboration. Des difficultés typographiques rendent d'autre part difficile la publication des données originales dans leur intégrité, en sorte que les personnes compétentes ne peuvent en tirer le fruit que l'auteur n'a pas su récolter.

D'autres fois, on a à faire à des discussions à perte de vue et sans conclusion — si toutefois elles n'aboutissent à de fausses conclusions — sur des questions qu'une connaissance, même élémentaire, des méthodes employées, aurait permis de résoudre en peu de mots et sûrement.

Ou bien encore on voit les auteurs — et c'est là, au fond, le moindre mal — redécouvrir une vérité ou réinventer des méthodes déjà trouvées dans d'autres domaines de la statistique. Et, même à part ces inconvénients manifestes, combien de fois, en lisant un auteur pourtant sagace et profond dans le domaine de ses recherches, n'arrive-t-il pas de noter le profit qu'il aurait pu tirer de la connaissance des travaux statistiques antérieurement publiés dans des revues appartenant à des disciplines differentes.

Dans les limites assignées à une revue, *Metron* se propose de faire un premier pas pour obvier à ces inconvénients. Cette revue s'adresse pourtant à tous les savants qui, dans des domaines et avec des méthodes disparates, s'occupent de statistique, en leur demandant de rendre convergents leurs efforts pour le progrès de la science. *Metron* vise à être, pour le moment, un raccord entre ces disciplines différentes en se preparant à devenir peu à peu un organe de coordination scientifique.

Par conséquent, et dans ce but, *Metron* reste ouvert à toutes les tendances méthodologiques, à celles qui rejettent tout procédé qui ne soit pas à la portée des personnes de culture moyenne, comme à celles des personnes qui font consister le progrès de la statistique dans l'emploi de plus en plus large des procédés les plus raffinés et les plus subtils des mathématiques supérieures. Les unes et les autres ont effectivement raison d'appliquer leur manière de voir dans des enquêtes particulières. Il y a en effet des problèmes auxquels il suffit d'utiliser, pour les résoudre, les méthodes anciennes de l'analyse statistique, devenues désormais le patrimoine commun de toute personne cultivée; d'autres problèmes, au contraire, ne peuvent être traités sans le secours des instruments de calcul les plus délicats. Entre les premiers et les seconds, il n'existe que des transitions insensibles. Or ces deux ordres de problèmes peuvent avoir un intérêt pour la science en général et pour la statistique en particulier. *Metron* les verra volontiers traités avec les méthodes les mieux appropriées à leur nature.

On ne peut certainement pas se dissimuler que la fonction d'intermédiaire sera d'autant mieux accomplie par la Revue que la technique dont usent les auteurs sera moins spéciale et que, par conséquent, le public capable de prendre pleine connaissance des recherches sera plus étendu. C'est pourquoi la Direction verrait avec plaisir traiter des questions différentes avec les moyens les plus simples adaptés à la nature du sujet.

Cela n'est, bien entendu, que l'expression d'un désir de la Direction et non une condition pour l'acceptation des articles. La Direction ne veut pas exercer une pression sur les auteurs et aller contre l'inclination naturelle de ceux qui, pour gagner en concision et en précision de langage ou en raffinement de méthode, sont disposés à renoncer à se faire entendre d'une partie des lecteurs.

La condition essentielle, pour l'acceptation des travaux, est simplement que ceux-ci apportent, dans le domaine de la méthodologie ou des applications statistiques, une contribution qui ait quelque originalité et puisse intéresser un cercle plus ou moins étendu de personnes adonnées aux études de statistique. Selon l'intérêt plus ou moins grand des sujets traités, les travaux seront insérés comme articles ou comme notes documentaires. Il arrive souvent que les recherches statistiques aboutissent à des résultats fragmentaires, insuffisants à former la matière d'un article, ou même d'une note, qui, non seulement peuvent offrir un intérêt de curiosité scientifique, mais encore peuvent constituer des données susceptibles de combler utilement les lacunes d'autres recherches. Des tels résultats seront publiés sous une rubrique spéciale.

Outre la liste des publications reçues, la Revue contiendra, dans chaque numéro, un ou plusieurs comptes-rendus d'ouvrages statistiques, ou bien des résultats statistiques tirés d'ouvrages qui n'ont pas un caractère statistique prépondérant. Chaque compte-rendu se rapportera à une branche particulière de la statistique, la statistique méthodologique, par exemple, ou bien la statistique démographique, ou sanitaire, ou anthropométrique, ou économique. Il y aura aussi un compte-rendu des sources statistiques et un compte-rendu des travaux accomplis dans les branches des mathématiques qui sont en rapport direct avec la statistique (calcul des probabilités, interpolation, etc.). On pourra enfin accueillir des discussions sur des sujets qui aient un interêt particulier pour le statisticien.

Metron est une revue internationale. Le fait qu'elle est publiée en Italie et que par suite les principaux rédacteurs sont necessairement italiens, aura pour conséquence que, surtout au début, la langue italienne y tiendra peut être une place plus grande que les autres langues internationales, le français, l'anglais, l'allemand. Toutefois ces dernières y sont admises dans des conditions d'absolue parité. Il appartient aux collaborateurs étrangers d'intensifier leur participation, de façon a faire disparaître toute différence. Le désir de la Direction est que la participation des auteurs non Italiens soit de plus en plus étendue.

La Direction.

PROGRAMME

One of the great difficulties in connection with modern statistics is that of becoming acquainted with the relevant literature; this is in fact derived from the work of very different schools and published in a variety of journals and transactions. It is necessary to consult mathematical, astronomical, technical, physical, chemical, actuarial, economic and financial, psychological, historical, legal, physiological and pathological, hygienic and medical, biological, genetic and eugenic and even purely zoological, botanical and agricultural publications.

It is true that generally such papers are merely applications of well-known methods to a special subject matter and the conclusions are only of interest to specialists in the particular branch of knowledge. But this is not always the case and sometimes methods of general interest to all statisticians are to be found, or, again, we find in particular connections methodological problems enunciated and solved, the scope of hypothesis contained in certain analyses brought to light, the approximation of theoretical conclusions verified and advances made by different routes; progress of interest in all branches of statistics. Still more frequently the results of particular statistical investigations, even when they do not interest all statisticians, are of importance to those engaged in similar inquiries; thus results obtained in the field of anthropolology, zoology, genetics or eugenics, hygiene, medicine, pathology, life assurance, political economy or history may be of great interest to the student of demography.

Whoever, desiring to enlarge the boundaries of statistical science as far as possible, is forced to consult the heterogeneous literature containing statistical papers must be aware of the inconvenience resulting from lack of coordination.

Valuable statistical data, carefully collected, scrupulously criticised, remain of no scientific value owing to their presentation and analysis by those unskilled in modern methods. Typographical difficulties offer obstacles to the publication of the original data in their integrity so that competent statisticians are unable to harvest the grain which the original author had not the skill to reap. Sometimes we meet with tedious, inconclusive, or even fallacious arguments where quite an elementary knowledge of statistical methods would have led to a simple and exact conclusion. Sometimes indeed we merely encounter — and this is the smallest evil — the rediscovery of an established truth or the re-invention of a familiar method, but how often do we not feel in reading the work of a writer, sagacious and profound in his own subject, that he would have greatly profited by a knowledge of other statistics published in journals quite disconnected from his speciality!

Within the limits appropriate to a review, *Metron* will endeavour to take the first step towards remedying these defects. It is addressed to those who, cultivating different soils with various implements, nevertheless are busied with statistics; that the results of their labours may become of general utility to science. It is hoped that *Metron* may be a bond of union between statistical workers in different branches, perhaps at length an organ of scientific coordination.

With this object, *Metron* will be catholic; its pages will be open to those who employ no methods beyond the scope of ordinary cultivated men as well as to those who delight in the most refined and subtle developments of mathematical science. There is indeed scope for both schools. Some problems can be solved by the older methods now part of the intellectual stock of all educated persons, others must be investigated with the help of more recondite procedures. Between these extremes are insensible gradations and both orders of inquiry interest science in general and statistical science in particular. It is hoped that both will find in *Metron* an appropriate treatment.

It cannot of course be denied that, the simpler the methods employed, the easier is the process of mutual enlightenment which *Metron* is intended to facilitate, since the number of readers capable of profiting by the exposition will be larger. The editors hope therefore that questions will be dealt with adopting as simple methods as their nature permits. But this is merely the expression of a desire not a condition of publication. The editors do not desire to put any compulsion upon contributors or to gainsay those who will forego a numerous audience for the satisfaction of expressing their ideas in the most concise and accurate style.

The sole necessary condition of approval for publication is that papers shall make a contribution to the theory or practice of statistics of original value and likely to interest a greater or smaller number of students of statistics. Contribution will be inserted as articles or notes in accordance with the importance of the subject matter. Frequently statistical researches lead to fragmentary results, insufficient to form the subject of a paper or even a note, but still offering something of scientific interest or perhaps filling a lacuna in other investigations. Such results will be published under a special heading.

In addition to a bibliography of publications received, each number of the review will contain one or more analyses of statistical works or of results perhaps taken from works not exclusively statistical in character. Each such analysis will deal with a particular branch of statistics, e. g. demographic, sanitary, anthropometric or economic statistics. There will also be an analysis of sources and of mathematical work bearing upon statistics (calculus of probabilities, interpolation, etc.). Discussions on topics of special interest to statisticians will be accepted as well.

Metron is an international review. As it is published in Italy and consequently a majority of the editorial staff are Italians, no doubt the Italian language will at first preponderate in its pages. But the other great international languages, French, English and German are admitted to its pages on terms of complete equality. It rests with contributors from other countries to increase their share in its pages and to cause to disappear any such difference. It is the wish of the editors that the participation of non Italian writers shall become larger and larger.

THE EDITORS.

PROGRAMM

Eine der grössten Schwierigkeiten, mit denen der moderne Statistiker zu rechnen hat, besteht darin, möglichst eine der Veröffentlichungen, die seine Studien betreffen, unbemerkt vorübergehen zu lassen. Diese Veröffentlichungen stammen aus verschiedenen Schulen und erscheinen in Akademieberichten und Zeitschriften, die die verschiedensten Wissenschaftsdisziplinen behandeln. Man müsste zu Rate ziehen Veröffentlichungen, die Astronomie betreffen, die Vererbungslehre, die Rassenhygiene, die Wirtschaftslehre, Physik und Chemie, die Finanzwissenschaft, Geschichte, Rechtswissenschaft, Hygiene und Medizin, Anthropologie, Ingenieurkunst, Versicherungswesen, Volkswissenschaft, Physiologie, Pathologie und Psychologie, reine Mathematik und allgemeine Lebenskunde und noch die Tierkunde und Zootechnie, Pflanzen- und Landwirtschaftskunde.

Wohl handelt es sich meistens um Schriften, welche nur die Anwendung gut bekannter Methoden des betreffenden Gegenstandes darstellen; oft auch — und das ist auch wahr — haben die vorgeführten Ergebnisse nur für den behandelten Wissenschaftszweig besonderes Interesse. Doch ist es nicht immer so. Schriften, die Bezug auf die statistische Methodologie haben, bieten ein allgemeines Interesse für jeden Forscher dieser Wissenschaft.

Oefter noch werden bei der Abhandlung von speziellen Gegenständen methodologische Fragen gestellt und gelöst, die Tragweite von Hypothesen, die für ein Verfahren kennzeichnend sind, hervorgehoben; die Schlussfolgerungen von theorischen Untersuchungen geprüft, und so auf verschiedenen Wegen Fortschritte erreicht, deren Kenntnisnahme alle Teile der Statistik befruchtet. In vielen anderen Fällen können die Ergebnisse besonderer statistischer Forschungen, wenn nicht für alle Statistikforscher, so doch für die Pfleger der Nebenzweige der Statistik grosses Interesse haben: so können z. B. statistische Ergebnisse, die auf dem Gebiete der Anthropologie, der Biologie, der Tierkunde, der Vererbungslehre, der Genetik, der Hygiene, der Medizin, der Pathologie, des Verischerungswesen, der Wirtschaftslehre, der Geschichte, erreicht worden, den Volksstatistiker lebhaft interessieren.

Derjenige, welcher anstrebt, seiner eigenen statistischen Ausbildung einen weitesten Umfang zu geben, und die verschiedensten, statistische Arbeiten enthaltenden Veröffentlichungen zu diesem Zwecke zu Rate zieht, bemerkt alsbald jene schwerwiegenden Unannehmlichkeiten, die Folge des Mangels an Einheitlichkeit bei der Arbeit sind.

Man lässt oft für die Wissenschaft kostbares, mit viel Mühe gesammeltes und fleissig geprüftes statistisches Material unbenützt, weil es von Personen, welche der modernen Bearbeitungsmethoden unkundig sind, bearbeitet und dargeboten wird. Dazu gesellen sich noch typographische Schwierigkeiten, die die Veröffentlichung der ursprünglichen Daten in ihrer Vollständigkeit meist verhindern, sodass dann auch den Sachkundigen die Möglichkeit genommen wird, den Arbeitsnutzen, der dem Verfasser entgangen ist, hierdort wahrzunehemen.

Manchmal sind es lange, schlusslose — wenn nicht geradezu das Gegenteil beweisende — Untersuchungen und Fragenbehandlungen, die auch mit elementaren Kenntnissen bekannter Methoden und in wenigen Worten hätten geklärt werden können.

Auch erleben wir — und das wäre noch das kleinste Uebel — die Wiederentdeckung von Wahrheiten und die Wiedererfindung von Methoden, die schon in anderen Gebieten der Statistik bereits aufgestellt sind. Ausser diesen leicht zu Tage tretenden Misserfolgen der Forschungsarbeit vermisst man auch oft, beim Lesen eines Werkes, jenen Nutzen, den der Verfasser — wenn auch scharfsinniger und tiefer Kenner seines eigenen Forschungsgebietes — aus der Kenntnis all jener statistischen Arbeiten, welche in wissenschaftlichen Zeitschriften, die andere Lehrdisziplinen behandeln, erschienen sind, hätte ziehen können.

Soweit es die Grenzen einer Rundschau gestatten, nimmt sich *Metron* vor, den ersten Schritt zur Beseitigung dieses Uebelstandes zu unternehmen. Er wendet sich deshalb an alle Gelehrten, die in allen Gebieten und mit den verschiedensten Methoden die Statistik pflegen, sie ersuchend, alle ihre Arbeitsbemühungen zum Fortschritte der Wissenschaft zusammen zu vereinigen. *Metron* bezweckt vorderhand ihr Bindeglied zu sein, um sich dann zu einem wissenschaftlichen Vereinheitlichungsorgan zu entwickeln.

Gemäss dessen stellt sich *Metron* allen methodologischen Tendenzen zur Verfügung: in gleicher Weise jenen, die Verfahren anwenden, die auch von Personen mit Durchschnittsbildung begriffen werden, als auch denen, die in immer grösserem Maasse mit den feinsten Methoden der höheren Matematnik den Fortschritt der Statistik zu fördern trachten. Die einen wie die andern haben in der Tat das volle Recht, sich in besonderen Untersuchungen zu betätigen. So giebt es Probleme, zu deren Lösung die ältesten, nunmehr zum Gemeingut jedes gebildeten Menschen gewordenen Methoden der statistischen Analyse genügen, andere hingegen wollen zu ihrer Lösung die Mithilfe der schwierigsten Rechnenoperationen. Und zwischen den einen und den anderen gibt es eine ganze Reihe unmerklicher Abstufungen. Nun können Probleme dieser verschiedenen Typen sowohl für die Wissenschaft im Allgemeinen, als auch für die Statistik im Besonderen, Interesse haben. *Metron* wird sie deshalb alle gern aufnehmen, wenn sie mit den geeignetsten Methoden behandelt sind.

Natürlich wird die Aufgabe des Zusammenwirkens, die sich die Zeitschrift stellt, um so leichter gelöst, je weniger Technicismus von den Verfassern angewendet und je zahlreicher infolgedessen das Publikum ist, welches von den gebrachten Forschungen Kenntnis nehmen wird. Deswegen würde die Direktion gerne sehen, wenn die Probleme stets mit den einfachsten, der Natur des Stoffes angemessensten Mitteln behandelt würden.

Das ist jedoch nur der Ausdruck eines Wunsches der Direktion und nicht Bedingung für die ev. Annahme eines Artikels. Die Direktion will nicht die Mitarbeiter zwingen, gegen ihre natürliche Neigung zu handeln, und auf verfeinerte Methoden, Sprachgenauigkeit und Kürze bei denjenigen Forschern verzichten, die nur von einem beschränkten Kreis der Leser verstanden werden.

Hauptbedingung für die Annahme der Arbeiten ist vielmehr, dass sie auf dem Gebiete der Methodologie oder der angewandten Statistik einen Beitrag liefern und irgend einen originellen Charakterzug aufweisen, der einen mehr oder weniger weiteren Kreis der Statistikpfleger interessiere. Je nach dem grösseren oder minderen Interesse des behandelten Stoffes werden dann die Arbeiten in die Rubrik der Artikel oder in die der Mitteilungen eingerückt. Manchmal jedoch gelangt der Statistiker bei seinen Nachforschungen zu einzelnen Ergebnissen, die weder für einen Artikel noch für eine

Notiz genügen, aber dennoch wissenschaftliches Interesse beanspruchen, und zur Ausfüllung von Lücken anderer Forschungen dienen können. Solche Ergebnisse werden in einer besonderen Rubrik veröffentlicht.

Die Rundschau wird in jeder Nummer ausser dem Verzeichnis der erhaltenen Neuerscheinungen eine oder mehrere Uebersichten von statistischen Werken oder von Ergebnissen, die nicht statistischen Arbeiten entnommen sind, enthalten. Jede dieser Uebersichten wird sich auf je einen besonderen Zweig der Statistik beziehen. So z. B. auf die methodologische Statistik, die demographische oder die sanitäre, die anthropometrische oder die wirtschaftliche. Ausserdem wird in der Rundschau eine Uebersicht der statistischen Quellen und der verschiedenen Zweige der Mathematik, die an die Statistik angrenzen (Wahrscheinlichkeitsrechnung ; Interpolationen, u. s. w.), Platz finden. Es werden ferner Erörterungen über Themen, die für die Statistiker von besonderem Interesse sind, angenommen.

Metron ist eine internationale Rundschau. Der Umstand, dass sie in Italien erscheint und dass die Verfasser desswegen, in der Mehrzahl, Italiener sind, wird naturgemäss zur Folge haben, dass die italienische Sprache, besonders anfangs, wahrscheinlich mehr vertreten sein wird als die drei anderen internationalen Sprachen: Französisch, Englisch und Deutsch. Diese werden jedoch unter absolut gleichen Bedingungen aufgenommen. Es ist nun Aufgabe der nicht italienischen Mitarbeiter, ihre Teilnahme an der Rundschau derart zu gestalten, dass jeder Unterschied vollauf verschwinde. Der Wunsch der Direktion ist die weiteste Teilnahme der Schriftsteller aller Nationen.

Die Direktion.

La méthode statistique

Les questions de méthode ayant leur place marquée dans cette Revue, ouverte à de mombreux ordres de recherches, quelques réflexions sur les caractères essentiels de la méthode statistique, sur ses procédés, sur la place qu'elle occupe dans le laboratoire où la pensée essaie de déchiffrer les empreintes de la Nature, sur sa valeur comme instrument de travail, ne sembleront point inutiles, au seuil de la publication.

Depuis quelque temps, les moules où se façonnent les conceptions de l'esprit en contact avec la réalité ont été élargis; le dogmatisme que suggère la méthode déductive, commode pour l'enseignement et souvent favorable à l'invention, s'est atténué. Les moyens d'interroger la Nature apparaissent plus que jamais limités; l'appel au sens commun semble la base la plus sûre du jugement, si la sincérité l'inspire, et l'on n'hésite pas à modifier des théories imposantes quand de nouveaux faits, même d'apparence minuscule, l'exigent. La principale difficulté est toujours de donner une exacte valeur aux faits observés, de les interpréter avec discernement: c'est pourquoi de bonnes méthodes sont indispensables, dont il importe seulement de délimiter avec soin le champ d'application.

Nous n'avons de véritable connaissance du monde extérieur que par le classement de nos observations dans un ordre conforme à notre constitution physique et psychique. Ce classement, opéré selon diverses disciplines, est le but de la Science, le seul but peut-être qu'elle puisse légitimement se proposer. Grouper des objets avec d'autres, d'après des analogies ou des ressemblances dont décide le jugement, placer l'ensemble ainsi formé dans un cadre plus général conçu d'après des analogies moins particulières : tel est le schéma des opérations au cours desquelles se déroule la vie journalière et sans lesquelles ne se peuvent concevoir, ni progrès, ni véritable connaissance. A chaque instant nous devons résoudre l'alternative de la conformité ou de la non conformité de tel objet, de tel phénomène, avec d'autres objets ou phénomènes déjà rangés dans des catégories distinctes.

L'esprit humain ne se borne pas d'ailleurs à résoudre des alternatives de ce genre: il dispose en outre, dans un certain ordre, les catégories qu'il a formées.

Cet ordre peut, dans notre conception de l'espace, être utilement représenté, par exemple, par des points placés sur une ligne, par des lignes parallèles se suivant dans un plan, par des plans échelonnés dans l'espace. Et ces représentations conviennent aussi pour figurer l'ordre que nous introduisons dans le temps quand nous notons, dans le monde extérieur, des repères auxquels se rapportent uniformément les phénomènes de conscience. Ainsi se classent d'une manière précise les effets et leurs causes, celles-ci étant, au sens le plus général, les circonstances qui précèdent les effets, leurs antécédents. L'observation, naturelle ou provoquée, apprend alors que tel effet est toujours précédé de telles causes ou, inversement, que telles causes sont toujours suivies de tel effet, et ainsi s'exerce la prévision sans laquelle la vie resterait purement végétative.

Mais la prévision fondée sur une classification simplement ordinale des objets est trop rudimentaire. Savoir que l'objet à atteindre est situé entre deux autres objets dont la position est connue ne permet pas de le saisir sûrement. Une échelle de comparaison convenablement graduée à laquelle toutes les autres échelles puissent se rapporter est nécessaire; elle est constituée par la suite des nombres cardinaux, dans laquelle les objets, vidés de tout leur contenu, se classent, d'après un criterium d'identité purement formelle, en catégories précises.

Cependant les classifications ne peuvent toujours emprunter la forme numérique. Car cette forme exige que l'objet du classement puisse, à certains égards, être décomposé en éléments identiques dont chacun représente une unité: les longueurs se classent pratiquement à l'aide des nombres qui les mesurent, c'est à dire qui expriment en combien d'unités de longueur on peut les décomposer.

En général cette décomposition n'est pas possible; en dehors des raisonnements mathématiques où l'ordre de la classification est parfois fondé sur des coupures entre parties mesurables, dont l'ensemble n'est pas mesurable, cet ordre est fondé, dans un grand nombre de cas, sur des qualités, c'est-à-dire, pour chaque objet;

sur un ensemble de propriétés, non mesurables numériquement, auquel on attribue une qualité. Des conventions particulières permettent cependant des classements utiles; par exemple, classements de couleurs, d'intelligences, de tempéraments, de professions, etc. opérés en vertu de conventions plus ou moins arbitraires.

Dans les cas de ce genre, les repères varient suivant l'espèce considérée; à défaut d'une convention plus générale, les classifications particulières, souvent irréductibles, les unes s'accordant avec le sentiment de la continuité, les autres discontinues, ne sont point susceptibles d'être reliées par des repères communs. Au contraire, toutes les fois que l'objet classé est susceptible d'être décomposé en unités identiques, quant aux propriétés qui servent de base au classement, la sériation peut procéder par degrés uniformes quels que soient les objets: autrement dit, le classement quantitatif, fondé sur des mesures, offre un caractère d'universalité. En même temps la notion d'égalité se précise, celle de constance ou de régularité prend un sens bien défini. Plusieurs personnes peuvent placer une couleur en des points différents d'une gamme colorée. Il est impossible qu'elle ne tombent pas d'accord, avec une extrême précision, si l'on classe des couleurs simples d'après les nombres correspondants des vibrations de l'éther.

Grâce à cette généralité du classement numérique, la position de chaque objet, dans la classe à laquelle il appartient, se trouve fixée avec précision; dans les classements par ordre de succession chronologique, on est à même de formuler avec exactitude les rapports constatés entre un phénomène et ses antécédents ou ses causes, et par conséquent, de vérifier la régularité de ces rapports, d'en établir d'autres plus généraux entre des phénomènes d'espèce différente. Les théories les plus impressionnantes par leur unité et leur beauté sont celles qui relient, par des nombres communs, des phénomènes de qualités apparentes diverses, par exemple, la théorie de la gravitation universelle ou la théorie électromagnétique de la lumière.

En fait, lors de ses premières démarches au contact de la réalité, il semble que l'esprit humain ait d'abord fait exclusivement appel à des notions de qualité: lourdeur, chaleur, etc.; la faiblesse des facultés d'observation, tantôt empêchait de saisir les régularités là où elles existaient réellement ou, plus souvent peut être, laissait croire à des similitudes là où régnait la diversité. Ce sont surtout les instruments que l'homme a façonnés, pour élargir et graduer le cadre de ses facultés, qui lui ont permis de substituer souvent des mesures quantitatives aux impressions de qualité et de découvrir les lois nécessaires à ses prévisions. Toutefois, ces instruments, et les régularités qu'ils ont permis de découvrir, ne valent guère que pour les phénomènes dont la cause déterminante peut être isolée. C'est en chauffant artificiellement des barres de fer de composition uniforme, puis mesurant les longueurs avec des instruments de précision et enfin en notant les températures avec un thermomètre étalon, que l'on a obtenu la loi approximative de la dilatation de ce fer. Avant ces expériences, quand la chaleur apparaissait simplement comme une qualité, si l'on avait juxtaposé une série de barres de fer de même longueur dans de la glace à 0, puis qu'on les eut portées dans de l'eau bouillante, on eut constaté un allongement égal pour toutes les barres, de sorte que la distribution de ces allongements eut été convenablement représentée sur une feuille de papier par des traits parallèles de même longueur. Des mesures plus précises ont permis de reconnaître que cette représentation n'était pas conforme à la réalité. Les traits représentatifs ont des longueurs différentes, la constance apparente fait place à des irrégularités. Celles-ci s'atténuent beaucoup quand on trie les barres de fer suivant leur composition chimique. Opérant sur du fer chimiquement pur, la constance redevient presque parfaite, au moins dans certaines limites de la température. Si l'on chauffe progressivement, on observe que les allongements sont à peu près constants, tout en augmentant légèrement avec la température. Et la même régularité approximative a été constatée pour d'autres substances. C'est ainsi que l'on a pu regarder comme une loi physique suffisament approchée la loi linéaire de dilatation et se rendre compte des changements de cette loi avec la constitution chimique ou physique des corps.

Le résultat a été atteint, parce qu'il a été possible de préciser la qualité de la substance par la description de ses propriétés chimiques ou physiques autres que la faculté de dilatation, tandis que, cette description demeurant invariable, on isolait la cause (élévation de la température) qui détermine l'effet étudié (allongement).

Les opérations se réduisent, on le voit, à des classements des objets étudiés, d'après des propriétés ou des grandeurs, puis à des dénombrements d'unités identiques, à certains égards, dénombrements qui constituent la mesure des objets. Le caractère général de ces opérations reste le même qu'on les applique, soit aux objets idéaux de la géométrie, soit aux substances ou aux êtres dont traitent les sciences de la nature.

Mais le mode d'application, et les enseignements qui découlent des résultats, diffèrent suivant qu'il est possible ou non d'isoler des autres influences la cause déterminante de l'effet.

Dans les sciences de la nature, l'isolement des causes est loin d'être toujours possible. Souvent, il est vrai, il est permis de négliger, provisoirement au moins, les causes dont l'influence est minime, de façon à ne laisser apparaître qu'une seule cause déterminante ou efficiente. Parfois le sens commun suffit pour écarter avec sûreté ces influences négligeables; dans bien des cas, cependant, l'opération comporte une décision arbitraire qui peut écarter l'esprit de la réalité.

La cause réelle d'un phénomène, a remarqué Stuart Mill, réside dans l'ensemble de ses antécédents: c'est donc toujours un acte quelque peu arbitraire que de choisir un de ces antécédents pour lui attribuer le rôle décisif. Que cet acte soit une nécessité de la vie pratique, qui exige de promptes décisions et se contente d'à peu près, il n'en reste pas moins que la cause déterminante unique est une pure conception de l'esprit, une notion limite dont la réalité approche parfois beaucoup, mais qu'en toute rigueur elle n'atteint jamais. L'hypothèse qu'implique cette notion appelle donc toujours des vérifications, des contrôles.

Dans les circonstances naturelles où des causes et des effets jouent dans des conditions voisines du cas limite, le choix et l'isolement de la cause déterminante n'offrent pas beaucoup de difficulté; la méthode expérimentale, à laquelle on recourt alors, permet d'appliquer aussi parfaitement que possible les règles les plus sûres de la logique, de multiplier les épreuves et contre épreuves, d'obtenir des rapports numériques simples dont la mise en oeuvre fournira de constantes vérifications de la bonne application de la méthode. Tel est le cas général dans l'étude des corps inorganiques dont les réactions, sous les influences extérieures, sont très limitées.

Lorsqu'il s'agit de phénomènes plus complexes, tels que ceux qui se produisent dans l'étude des organismes, la découverte et la vérification des lois ne sont point aussi simples. La technique de l'observation expérimentale exige de nouvelles précautions; malgré ces précautions, les changements incessants qui se produisent dans les êtres vivants, les réactions autonomes dont ils sont capables, rendent plus précaire l'hypothèse de la permanence des conditions de l'observation au cours de l'expérience; c'est ainsi que les organismes témoins se transforment inévitablement; l'on ne peut compter, comme avec la matière inorganique, sur la permanence presque absolue des conditions d'une expérience.

L'application de la méthode expérimentale est cependant encore légitime et féconde dans les recherches relatives aux êtres vivants, mais, les enseignements qui en découlent emportent avec eux une part de l'incertitude dont il est impossible de dégager entièrement les conditions de l'expérience. Il est bon de contrôler, toutes les fois qu'on le peut, les résultats de l'expérience provoquée en utilisant en outre la seule méthode qui soit applicable aux phénomènes dont les causes sont trop complexes et entremêlées pour pouvoir être isolées.

D'ailleurs, même quand certaines causes sont susceptibles d'isolement, il n'est pas toujours possible d'opérer la séparation necessaire. Par exemple, dans la biologie humaine. l'homme ne peut généralement pas constituer un champ d'expérience au sens habituel de ce mot. Dans l'étude de nombreux phénomènes physiologiques, ou dans celle de l'hérédité humaine, il est rarement permis d'opérer d'après la technique applicable aux plantes ou aux animaux.

En biologie, l'appréciation de la cause déterminante dépend en tout cas beaucoup de la sagacité de l'observateur; elle n'est plus tout à fait impersonnelle et n'offre plus dès lors un caractère accepté d'universalité. Les vérifications deviennent de plus en plus nécessaires si l'on veut éviter de lourdes erreurs.

On réalise ces vérifications en appliquant, perfectionnant et précisant les procédés de comparaison et de raisonnement que l'homme met instinctivement en oeuvre quand il observe avec quelque reflé-xion les faits de chaque jour. Car ces faits sont généralement soumis à des influences complexes qu'il est impossible de séparer; ils naissent du choc de circonstances multiples dont on n'est pas maître, que l'on ne peut par conséquent faire varier à son gré pour noter les effets consécutifs. On doit se borner à classer les faits observés d'après leurs affinités apparentes, à noter leurs modalités différentes dans chaque catégorie, à comparer entre elles les collectivités de faits ainsi classées. C'est ce que fait l'homme qui distingue les propriétés nutritives ou non nutritives, salutaires ou nuisibles, des fruits qui l'entourent, qui compare la récolte de certaines plantes à celle d'autres plantes, qui établit des rapports entre ces récoltes et certains phénomènes physiques: saisons, exposition solaire, pluie, etc.. Mais, opérant sans méthode et raisonnant mal, les résultats qu'il obtient peuvent être erronés et même néfastes. On est loin ici du cas limite, signalé plus haut, où le phénomène étudié semble dépendre d'une cause déterminante unique, facile à isoler, où la méthode expérimentale pourrait s'appliquer avec rigueur; il est d'autant plus nécessaire d'apporter tout de même quelque rigueur dans les classements et les comparaisons auxquelles prêtent les phénomènes complexes; c'est le but de la méthode statistique. Celle-ci peut n'être d'abord qu'un procédé auxiliaire de contrôle de la méthode expérimentale, lorsque certaines des causes dont on étudie l'effet peuvent à volonté être supprimées ou mises en activité à des degrés variables et qu'il s'agit simplement de vérifier les résultats des expériences provoquées, au moyen d'observations ultérieures. Elle devient ensuite l'unique méthode de recherche quand s'accroît la complexité des causes qui régissent le phénomène.

Pour l'application de la méthode statistique, l'instrument essentiel est le dénombrement des objets classés en collectivités que l'on se propose de comparer. Avant de signaler les procédés à l'aide desquels on met en oeuvre les résultats de ces dénombrements, il ne sera point inutile de jeter auparavant un coup d'oeil sur le champ d'application de la méthode. Nous avons dit que l'applications se justifie, au moins à titre de contrôle, jusqu'au voisinage du point où la notion d'une cause déterminante unique donne l'impression de cette simplicité idéale qui n'est point dans la nature mais qui aide à l'interpréter. A mesure que l'on s'éloigne de ce point, la complexité des faits ne permet plus de séparer aussi aisément leurs causes. Lorsque la complexité est extrême, on est en présence de l'impossibilité absolue de dissocier les influences en présence: la notion de cause déterminante s'est tout-à-fait évanouie. Pratiquement ce cas extrême ne se présente pas puisque l'esprit se refuse à admettre qu'un fait se produise sans cause déterminante. Allant encore une fois jusqu'à la limite de sa conception, celle de la complexité, l'esprit concilie cette conception et celle de la causalité en attribuant au *hasard* l'effet de la multitude des causes en vertu desquelles des effets se distribuent suivant une certaine loi, le mot hasard étant d'ailleurs souvent employé dans un sens quelque peu différent de celui qui convient ici.

La méthode statistique, qui traite les observations naturelles dans les cas où les causes complexes qui les conditionnent ne peuvent être isolées, permet de découvrir cette loi du hasard. Si elle est impuissante à faire connaître d'autres lois, quand on entend par loi scientifique la formule du développement d'une cause dans le temps, elle peut du moins aider à débrouiller le faisceau des causes complexes en écartant à la fois ce qui est imputable à une cause déterminante unique et ce qui est imputable au hasard.

Les classements dont elle fait principalement emploi ne résultent plus de la comparaison de deux phénomène variables dont l'un est la cause, l'autre l'effet. En général ils ne sont fondés que sur un seul fait observé: c'est ce qui explique l'infériorité de la méthode statistique par rapport à la méthode expérimentale quand il s'agit de prévoir des événements futurs. L'événement particulier attendu ne peut plus être relié mécaniquement a sa véritable cause. Quels sont les caractères essentiels de cette méthode de traitement, non plus des observations provoquées par l'expérience, mais des observations indépendantes, de la volonté de l'observateur?

Ces caractères n'ont rien de mystérieux. Comme nous l'avons dit plus haut, on se borne à appliquer, avec une certaine précision, des procédés familiers aux hommes depuis qu'ils existent, en un mot à mettre en oeuvre le sens commun tel qu'il s'applique à la vie journalière.

Laissant de côté la technique et la critique de l'observation, qui ne sont point spéciales à la méthode, nous diviserons en trois parties la série des procédés d'analyse qui s'appliquent au traitement des observations statistiques: 1.) comparaison générale des groupes d'observations; 2,) étude de la variabilité des observations â l'intérieur de chaque groupe; 3.) recherche des liaisons entre les groupes.

Les procédés de la première catégorie permettent de simplifier la comparaison générale des groupes d'observations. On substitue à chaque ensemble complexe une valeur unique qui exprime la valeur de l'ensemble, abstraction faite du nombre des éléments dont il est formé.

Comme on l'a dit plus haut, les classements peuvent être exclusivement basés sur des qualités, telles que couleurs, caractères moraux, professions, etc. qui, provisoirement au moins, ne peuvent être précisées par des degrés numériques et qui permettent seulement de ranger les observations dans un ordre conventionnel. D'autres fois, ces classements peuvent être numériques, d'après des échelles graduées en quantités, telles l'échelle des tailles, celle des âges, celle des revenus, etc.. Les observations quantitatives comportent un classement plus précis que les observations qualitatives, puisque leurs différences sont marquées à la fois par un ordre et par un écart, tandis que les différences entre les observations qualitatives sont simplement marquées par le rang de chaque objet dans la classification. Dans l'un ou l'autre cas, l'observation qui, dans la classification considérée, partage le groupe en deux parties contenant chacune le même nombre d'observations, c'est-à-dire l'observation médiane ou la *valeur médiane* — chaque observation étant regardée comme possédant une valeur soit qualitative soit quantitative — est un bon élément de comparaison des divers groupes. Car, toute autre valeur laisserait d'un côté de la graduation plus d'observations que de l'autre côté; la valeur qui laisserait, vers chaque extrémité de la graduation exactement les mêmes nombres que la précédente, mais disposés en sens inverse, constituerait un élément de comparaison offrant le même caractère que le premier. On n'aurait donc aucune raison de choisir l'une plutôt que l'autre puisque, par hypothèse, les intervalles des observations n'ont aucune signification: on évite la difficulté du choix en adoptant comme élément de comparaison la valeur médiane, ou l'une quelconque des deux valeurs médianes consécutives quand le nombre des valeurs du groupe est un nombre pair.

D'ailleurs, dans une classification numérique, la médiane peut être définie par une propriété numérique: la somme des distances, prises en valeurs absolues, d'un point de l'échelle de classement, aux points de cette échelle qui correspondent aux diverses observations du groupe, est un minimum, quand le point de départ correspond à la valeur médiane. En raison de cette particularité, la médiane peut aider avantageusement à comparer des ensembles de grandeurs numériques, sa position étant définie numériquement par une convention tout-à-fait générale. Mais lorsqu'il s'agit de comparer des grandeurs, bien d'autres conventions peuvent être adoptées.

En raison des liens de plus en plus étroits qui unissent les sciences de la nature, il y a un certain intérêt à ce que les éléments qui interviennent dans les raisonnements et les calculs puissent se combiner entre eux, quelle que soit la branche des connaissances à laquelle ils se rapportent. L'un des instruments les plus féconds de ces combinaisons est le calcul algébrique; il importe par conséquent, à défaut d'autre raison préopérante, que les caractéristiques de l'élément de comparaison choisi puissent entrer aisément et sans déformation dans les calculs algébriques, en particulier que ces caractéristiques respectent la convention des signes. Cette convention n'est d'ailleurs point tout-à-fait arbitraire; elle répond à une sorte d'instinct qui nous fait attacher plus d'importance au résultat final d'une série d'opérations qu'aux parties composantes. Dans de certaines limites, les compensations qui se produisent au cours de ces opérations sont conformes à la nature: un animal vit au cours d'une suite de compensations entre la disette et l'abondance. Or la règle des signes permet d'inscrire immédiatement et sans changement d'ordre le résultat d'une suite d'additions et de soustractions; elle permet de représenter graphiquement ce résultat avec la plus grande simplicité. Il y a donc des raisons sérieuses de préférer à la valeur médiane, qui fait intervenir les valeurs absolues des écarts, d'autres éléments de comparaison. Puis, quand il s'agit de grandeurs, l'élément de comparaison devrait, semble-t-il, tenir compte de l'importance de ces grandeurs. Tel n'est pas le cas pour la grandeur médiane.

Il est donc souvent préférable de choisir comme terme de comparaison d'un groupe de grandeurs, avec d'autres groupes, une quantité qui dépende de l'ensemble des grandeurs observées, de telle sorte qu'à toute valeur numérique de ces dernières corresponde une valeur numérique du terme de comparaison, autrement dit qui soit une fonction des grandeurs observées dans le groupe.

La moyenne arithmétique est la plus simple des fonctions possibles et la plus communément acceptée. Elle est identique, à un facteur près, au total des observations. Elle a toujours été employée comme terme de repère dans les marchés équitables: ce qui a été en moins par rapport à cette moyenne doit se retrouver en plus. A cet égard on peut dire qu'elle est adaptée à la nature humaine, autant que le sens de la ligne droite ou le sentiment de la justice.

De plus les propriétés fondamentales de la moyenne arithmétique: somme des écarts, par rapport aux diverses grandeurs de l'ensemble, réduite à zéro, somme des carrés des mêmes écarts constituant un minimum, permettent de l'introduire dans les calculs algébriques.

D'autres fonctions ont été proposées comme éléments de comparaison de groupes statistiques; le choix dépend, dans une certaine mesure, du but poursuivi. Aucun procédé de comparaison, en effet, ne saurait être universel. On ne juge bien un rapport que si l'on considère les objets comparés avec un instrument approprié au but.

Supposons que l'on se propose de comparer à deux époques différentes un ensemble de valeurs dont le total a une signification précise, par exemple le prix des oeufs sur différents marchés. Le prix moyen obtenu en prenant la moyenne arithmétique des prix des douzaines d'oeufs vendus a un sens précis: c'est le quotient, par le nombre de douzaines, du produit de l'ensemble des ventes. La comparaison de ce prix moyen, à deux époques, donne une mesure exacte de la somme déboursée, dans les deux cas, pour obtenir le même nombre d'oeufs; il est impossible de mieux caractériser le changement du niveau général des prix de cette denrée.

Supposons maintenant que l'on veuille se rendre compte du mouvement des prix de marchandises différentes. S'il existe une influence commune qui provoque des mouvements à peu près parallèles de ces prix, comme c'est le cas lorsque la valeur de la monnaie se modifie, la moyenne (ou la somme) des prix est un bon indice des changements de l'influence commune qui les gouverne, quoique cette moyenne n'ait plus de signification concrète, les objets dont les prix sont associés n'étant pas de même nature.

On peut ramener l'operation à la comparaison de quantités de même nature si l'on considère, non plus les prix en valeur absolue, mais les accroissements relatifs de ces prix. Ici encore la moyenne arithmétique de ces accroissements relatifs fournit une bonne mesure de l'ensemble des accroissements observés d'une époque à l'autre.

Cette moyenne se transforme d'ailleurs en une autre dont la formule reprend les valeurs absolues des prix quand les accroissements sont successivement calculés à des intervalles de temps très petits. Chaque accroissement relatif tend alors vers l'accroissement absolu du logarithme du prix correspondant, de sorte que la moyenne des accroissements relatifs peut être remplacée par la moyenne des logarithmes des prix, laquelle peut elle-même être remplacée par ce que l'on appelle la *moyenne géométrique*, les trois quantités dépendant étroitement les unes des autres. Ainsi, suivant que, dans l'étude des changements observés dans un groupe d'observations, c'est-à-dire dans la comparaison des groupes successifs, on envisage les mouvements absolus ou les mouvements relatifs, la moyenne arithmétique dans le premier cas, la moyenne géométrique dans le second, satisfait plus particulièrement l'esprit. La *moyenne harmonique* correspond au cas où l'on remplace les quantités par leurs inverses et trouve son application quand on compare successivement des grandeurs mesurées avec une unité variable. On peut d'ailleurs imaginer des infinités de fonctions des grandeurs associées dans un même groupe, fonctions susceptibles de servir d'instruments de comparaison des groupes.

La moyenne arithmétique offre néanmoins de grands avantages dont le principal est l'extrême simplicité de sa détermination. On vient de voir qu'elle peut fournir une valeur approchée de fonctions plus compliquées, par exemple quand on substitue la moyenne arithmétique de variations relatives à la moyenne géométrique de grandeurs variables absolues.

Dans les réflexions précédentes nous avons seulement considéré la moyenne arithmétique comme l'élément de comparaison communément accepté d'un ensemble d'observations. Nous n'avons cherché aucune analogie entre les groupes d'observations statistiques et les groupes d'observations considérés dans les sciences expérimentales où se trouvent associés des phénomènes identiques, ou bien à peu près identiques, dont la répétition constatée signale des causes et permet de formuler des lois. Nous n'examinons point en ce moment s'il est légitime d'admettre l'existence de lois statistiques. L'uniformité doit être découverte a posteriori; en statistique il est dangereux de la supposer à priori.

La question de savoir si la moyenne, qui représente le *total* des observations d'un groupe, peut légitimement être regardée aussi comme représentant individuellement la plupart de ces observations, conduit à se rendre compte des différences que présentent entre elles les grandeurs d'un même groupe, en un mot, à mesurer la variabilité de ces grandeurs. Avant d'aborder cette partie de la méthode statistique, nous rappelerons certaines propriétés de la moyenne arithmétique qui se manifestent dans le développement des observations naturelles.

Comme nous l'avons remarqué, chaque phénomène dont les observations sont traitées par la méthode statistique peut être regardé comme dû à un grand nombre de causes indépendantes et indiscernables, qu'il est difficile d'isoler. Nous pouvons cependant, par la pensée, supposer que ces causes interviennent séparément. L'une d'entre elles agissant seule est susceptible de produire des effets dont la grandeur n'est pas connue, mais est certainement limitée. Par exemple des hommes de force musculaire inégale étant chargés d'un terrassement, le cube de terre enlevé dans le même temps, à difficulté égale, dépendra de cette force et prendra des valeurs inégales suivant les individus. Toutefois, durant le temps considéré, des circonstances diverses peuvent rendre le travail plus facile ou plus difficile, en sorte que, indépendamment du rendement dû à la force musculaire, le degré de friabilité des terres, l'humidité, la présence de pierres, etc., peuvent permettre aux plus favorisés d'accroître leur production. Autant de causes dont les effets varieront encore suivant les individus. Et de même l'influence que peut exercer, sur l'activité, l'espérance du gain, le sentiment du devoir professionel, etc. sont autant de causes morales capables d'effets différents.

D'après cela, le résultat du travail de ces ouvriers peut être regardé comme un total d'effets partiels, dus à des causes nombreuses, et qui se superposent dans le groupe de travailleurs dont on observe le rendement. Cette vue schématique de la formation d'effets, dont l'observation révèle les grandeurs, offre un caractère d'imprécision et de généralité qui permet de l'adapter à la genèse de tous les faits naturels justiciables de la méthode. Il suffit que les causes d'un phénomène offrent une certaine complexité pour qu'il soit possible de réduire schématiquement cette complexité à une superposition d'actes simples, se distinguant suivant les causes qui les régissent. En scindant suffisamment la notion conventionnelle de cause, de façon que les effets de chacune d'elles soient très petits, on peut regarder ces effets comme égaux d'une cause à l'autre et considérer les groupes successifs de ces effets élémentaires. Et ainsi tout un ensemble de grandeurs observées peut être regardé comme le résultat de l'association de séries de groupes de grandeurs élémentaires identiques qui, en se combinant et s'ajoutant d'un groupe à l'autre, ont formé l'ensemble observé mais auraient pu en former beaucoup d'autres.

Supposons d'abord ces séries identiques. Dans chacun des groupes qui composent l'une d'entre elles, de même que dans l'ensemble des effets résultants, les grandeurs élémentaires qui composent le groupe ont une moyenne arithmétique; on peut calculer par rapport à cette moyenne les écarts des grandeurs, le carré moyen de ces écarts, le cube moyen des écarts, une puissance moyenne quelconque des écarts.

Cela posé, les propriétés de la moyenne, auxquelles nous avons fait allusion plus haut peuvent s'énoncer comme suit:

Dans l'ensemble des effets qui résultent de l'association d'un certain nombre de groupes identiques:

1) La moyenne arithmétique des grandeurs élémentaires reste la même dans l'ensemble que dans chacun des groupes qui ont servi à former cet ensemble, quel que soit le nombre des groupes associés.

2) Le carré moyen des écarts des éléments, qui entrent dans l'ensemble, autour de leur valeur moyenne est égal au quotient du carré moyen correspondant, dans chaque groupe, par le nombre des groupes.

3) Le cube moyen des écarts des éléments de l'ensemble autour de leur valeur moyennne est égal au quotient du cube moyen correspondant, dans chaque groupe, par le carré du nombre des groupes.

Si l'on considère une suite de groupes dont le nombre s'accroît à mesure que les causes en jeu se multiplient, ainsi que les ensembles de résultats successifs, les propriétés précédentes peuvent s'énoncer en disant que, dans la transformation des groupes élémentaires en ensembles résultants, trois grandeurs restent invariantes ou se conservent. Aucune puissance des écarts autre que la seconde et la troisième ne comporte de semblable conservation.

Ces propriétés subsistent, sauf de légères modifications, quand les groupes élémentaires ne sont point identiques, mais il est plus simple, et généralement sans inconvénient pour l'adaptation de la théorie à la réalité des faits, de supposer l'identité des groupes. Il est cependant intéressant d'étendre les propriétés à des séries de groupes dont chacune est composée d'un même nombre de groupes identiques, ceux-ci différant, et comportant des moyennes différentes, d'une série à l'autre. Dans ce cas, la moyenne arithmétique des éléments incorporés dans l'ensemble se conserve encore, mais le carré moyen des écarts est plus grand que le carré moyen relatif à chaque série: la différence est égale à peu prés au carré moyen des écarts des moyennes des séries par rapport à la moyenne des éléments de l'ensemble.

Revenons au cas d'une seule série de groupes identiques représentant les effets élémentaires d'une série de causes. La superposition des éléments de chaque série, pour former l'observation résultante, s'opère suivant un mécanisme dont le caractère principal est facile à saisir. En effet, s'il y a m groupes de n effets chacun, dont les grandeurs vont de 1 à n, la grandeur de l'effet résultant ne peut varier que de n à $n \times m$, tandis que, par le jeu des combinaisons multiples des effets partiels susceptibles de produire un effet résultant particulier, le nombre des effets résultants de ces combinaisons est égal à n^m, soit un nombre beaucoup plus considérable que $n \times m$. Les effets résultants se tassent par conséquent d'autant plus que le nombre m des causes en jeu est plus considérable.

Il est bon de rappeler que le mot cause est employé ici dans son sens le plus général d'antécédent. Et comme chaque antécédent est lui-même l'effet d'influences antérieures, on choisit les antécédents les plus commodes à observer comme groupes hypothétiques d'effets possibles.

Par exemple, pour étudier la mortalité d'un ensemble d'individus de même âge, on regarde le nombre des décédés dans cet ensemble comme l'effet résultant d'un certain nombre de causes, chaque cause étant l'un des individus du groupe qui fournit comme effet élémentaire, soit un décédé, soit un survivant. La variation de l'effet est réduite ici à une simple alternative entre deux valeurs dont les *possibilités* peuvent être égales ou inégales.

Les propriétés de la moyenne arithmétique qui viennent d'être rappelées ont une grande importance pour l'étude de la variabilité des observations à l'intérieur d'un ensemble, lorsque ces observations se distribuent d'après une échelle numérique.

Quand il n'en est point ainsi, lorsque les observations portent sur des qualités, non sur des grandeurs, nous avons signalé la commodité de la médiane pour la comparaison de plusieurs ensembles. Pour analyser la répartition des observations autour de cette médiane, on peut déterminer la médiane de chacune des moitiés des observations de l'ensemble, puis les médianes des nouvelles moitiés et ainsi de suite, ou bien utiliser d'autres coupures. Les observations étant ainsi réparties en classes égales qui sont comprises dans des régions plus ou moins étendues de l'échelle, ces changements d'étendue donnent une idée satisfaisante de la variabilité.

La même méthode peut être appliquée avec plus de précision quand l'ensemble est composé de grandeurs réparties le long d'une échelle numérique. Les intervalles qui, le long de l'échelle, comprennent un même nombre d'observations donnent, par leur diversité, une mesure de la variabilité des observations. On attache un intérêt particulier à l'intervalle des *quartiles*, dans lequel sont compris la moitié des observations prises autour de la valeur médiane.

Dans certains ensembles où les observations se tassent en un point particulier de l' échelle, la détermination des quartiles ou d'intervalles analogues peut difficilement être assez précise. On a caractérisé alors la variabilité de l'ensemble en calculant la différence moyenne des grandeurs associées dans le même ensemble. Comme les différences prises avec leurs signes donneraient toujours une somme nulle, on considère seulement les valeurs absolues des différences.

Mais, de même que pour la médiane, l'emploi de la différence moyenne ne permet pas d'introduire les changements successifs des grandeurs dans les calculs algébriques ordinaires. On peut tourner la difficulté à l'aide de certaines hypothèses sur la forme générale de ces changements; nous signalerons plus loin des procédés de ce genre, dont la valeur démonstrative dépend naturellement avant toute chose de la foi accordée aux hypothèses initiales.

La méthode de mesure de la variabilité qui semble la plus générale, et la plus conforme aux opérations habituelles du calcul algébrique, consiste à prendre pour point de départ des mesures la moyenne arithmétique des observations.

Reprenons la série de groupes identiques d'éléments qui représentent les effets élémentaires de m causes. Le carré moyen des écarts des effets qui résultent de la superposition des effets élémentaires est égal, avons-nous vu, au quotient de la grandeur analogue, calculée pour l'un des groupes associés, par le nombre m de groupes. Il est naturel de mesurer les écarts en prenant pour unité la racine carrée de ce carré moyen, ce que l'on appelle *l'écart type*. On voit alors que plus le nombre m augmente, plus se resserre l'unité de mesure des écarts, et cèla proportionnellement à la racine carrée de m. Or on démontre que, dans les limites de cette unité de mesure, se trouve comprise une fraction constante du nombre total des termes, c'est-à-dire du nombre total des observations. Cela revient à dire que cette fraction est comprise entre des limites de plus en plus resserrées, dont le resserrement croît comme $\sqrt{m}$ à mesure qu'augmente le nombre des causes qui déterminent l'ensemble des observations.

L'écart type fournit ainsi une bonne mesure des écarts observés autour de la moyenne: il mesure la dispersion des observations; mais, comme les écarts entrent par leurs carrés dans le calcul de l'écart type, celui-ci n'indique rien quant au sens des écarts, pas plus que l'écart moyen absolu autour de la médiane, ou la différence moyenne. Pour obtenir une indication générale de la direction qu'affectent principalement les écarts, soit d'un côté, soit de l'autre de la moyenne, on peut calculer leur cube moyen, qui n'est autre chose que le carré moyen lorsque chaque carré élémentaire est affecté d'un poids proportionnel à la grandeur de l'écart pris avec son signe.

Ce cube moyen, calculé d'après l'ensemble des observations, et rapporté au carré moyen, indique la valeur *dominante* de l'ensemble des observations. L'ensemble des observations, en tant que collectivité dénombrable, avait été caractérisé précédemment par la médiane et par la moyenne; la dominante, qui signale le point de concentration maximum des observations et la déviation de leur distribution par rapport à la moyenne, fournit un nouvel élément de comparaison collective.

L'intérêt de chacune de ces grandeurs caractéristiques varie d'ailleurs suivant le point de vue. La médiane marque le centre de la collectivité, la moyenne son importance, la dominante le point de concentration, la communauté, du caractère étudié. Dans un rassemblement de troupes, la position moyenne convient comme centre d'approvisionnement; la médiane signale suffisamment la position générale des troupes déployées; la dominante marque l'emplacement du gros des troupes. Quant au mode de distribution des observations, soit autour de la médiane, soit autour de la moyenne, il est caractérisé en gros par l'écart moyen absolu, par la différence moyenne, ou bien par l'écart type.

Ces grandeurs caractéristiques donnent une idée générale du mode de distribution des observations. Mais l'analyse de cette distribution doit être poussée plus loin. A cet effet on se réfère à une distribution simplifiée prise comme terme de comparaison de toutes les autres.

Cette distribution-type conventionnelle correspond au schéma de m groupes d'effets associés dont il a été question plus haut. Le nombre m doit être choisi de façon que la distribution de référence soit aussi simple que possible et que ses éléments soient faciles à calculer. Or, si l'on se rappelle que la concentration des observations s'accroît constamment à mesure que m augmente, il est naturel de choisir, comme distribution type, l'une de celles vers lesquelles on tend quand m croît indéfiniment. De plus c'est alors que les calculs sont le plus commodes.

Pour expliquer comment on détermine cette distribution type, imaginons les observations de diverses grandeurs représentées, dans un plan, par des points posés le long d'une échelle graduée, ou bien par des colonnes, élevées entre les divisions successives de l'échelle, et de hauteur proportionnelle au nombre des points qu'elles surmontent. Les extrémités des colonnes ainsi disposées forment une ligne brisée, laquelle apparait comme une ligne courbe quand on multiplie suffisamment les divisions de l'échelle. La ligne a nécessairement un point de départ et un point d'arrivée à l'aplomb de points déterminés de l'axe de base, puisque l'étendue des observations est toujours limitée, mais elle s'élève nécessairement aussi au dessus de l'axe à mesure qu'augmente le nombre m des groupes composants, puisque les observations se concentrent.

Parmi toutes les courbes limites que l'on pourrait choisir comme repère commun de toutes les distributions, il est naturel de prendre la plus simple, celle qui n'aura qu'un seul sommet, et dont les deux extrémités partent de l'axe de base. On simplifie encore les formules en remarquant que la forme de la courbe ne change guère si l'on suppose que, soit les deux points de départ sur l'échelle de base, soit l'un d'eux seulement, s'éloignent indéfiniment. Les conditions qui précèdent suffisent pour déterminer des courbes dont les équations permettent de former la table des valeurs qui correspondent aux écarts des ordonnées de la courbe choisie, à partir de la valeur dominante; les nombres de cette table servent de terme de comparaison avec les nombres d'observations, quand on a ramené à une même valeur le total des observations et le total des nombres de la table.

Le cas limite que nous venons de considérer est précisément celui des événements que nous attribuons au hasard parce qu'ils résultent de l'interférence d'un nombre infiniment grand de causes indépendantes que nous sommes incapables d'isoler et dont les actions restent inconnues. Mais, pratiquement, il n'est nullement nécessaire que le nombre des causes soit très-grand pour que la table, ou la courbe, des observations soient à peu près conforme à la table, ou à la courbe, théorique.

L'une des courbes dont nous venons d'indiquer la genèse est symétrique par rapport à l'ordonnée moyenne; la moyenne, la médiane et la dominante sont alors confondues: c'est cette courbe qui est plus particulièrement désignée sous le nom de courbe normale, représentation d'une loi normale d'écarts, les autres courbes en étant des déviations. Souvent, et dans certaines limites autour de la moyenne, elle peut remplacer les courbes déviées qui s'en écartent peu quand on superpose les ordonnées dominantes. Ces courbes représentent de la façon la plus simple les distributions théoriques qui résulteraient de la superposition des effets variables d'un très grand nombre de causes conjuguées. Elles donnent une image suffisante de la distribution de beaucoup d'observations naturelles; caractères morphologiques, tailles, sexualité, mortalité, revenus, etc. On peut en construire beaucoup d'autres plus précises, mais moins simples, et par suite moins utiles. La courbe symétrique dépasse dans deux directions les limites des observations; seulement les parties de cette courbe au delà des limites sont tout à fait négligeables. L'une des courbes déviées ne dépasse les limites que dans une seule direction, partie également négligeable; de l'autre côté de son point de départ sur l'axe de base elle ne comporte pratiquement aucune partie réelle.

Quand les observations se groupent de façon à être convenablement représentées par la courbe normale, pour laquelle la médiane, la moyenne et la dominante sont confondues, la moyenne ne represente plus seulement le total des observations. On peut la regarder comme représentant individuellement chacune des observations, à l'exception de celles qui s'en écartent accidentellement et sont relativement rares. Dans ce cas, les observations se distribuent effectivement comme elles le feraient si elles résultaient d'opérations conformes au schéma précédemment considéré de causes nombreuses et identiques dont les effets ont même puissance. On en *infère* que les causes fonctionnent réellement suivant ce schéma et qu'ainsi la moyenne reste à peu prés invariable quel que soit le nombre des observations. La moyenne devient alors une grandeur fixe comparable aux grandeurs dont la méthode expérimentale permet d'attester la constance, à celles qui justifient des prévisions.

Mais la conclusion ne repose que sur une inférence, et surtout, celle-ci se fonde sur une analogie qui n'est pas toujours suffisamment établie. On se borne souvent à comparer les sommes des écarts à partir de la moyenne, sans avoir égard à leur répartition non plus qu'à leur sens. Le procédé masque des irrégularités et d'ailleurs, l'appréciation de la conformité ou de la non conformité des observations à la distribution normale comporte un certain arbitraire. Ce n'est que par une convention — d'ailleurs acceptable parce que justifiée par l'expérience, — que l'on ne regarde comme anormaux que les écarts supérieurs par exemple à trois fois l'écart type; cette convention est d'ailleurs commode.

D'après ce qui précède, il y a deux sortes de régularités: celle qui résulte de l'influence d'une cause permanente notable dont l'action est troublée par de nombreuses causes relativement faibles, exemple: quantité de pluie qui tombe sur les divisions égales de la surface d'un champ; en second lieu celle qui résulte de causes multiples quelconques, dont les effets sont tous relativement faibles par rapport à l'importance du résultat, exemple: les hauteurs des tiges de blé dans un champ. Dans les deux cas, la moyenne fournit une représentation, en quelque sorte individuelle, des éléments de la collectivité, mais la dispersion, plus faible dans le premier cas que dans le second, suggère à l'observateur l'idée de la cause permanente, de la tendance qui persiste à travers les obstacles. Quand la distribution s'écarte du type normal, comme si le schéma de causes, au lieu de ne comprendre que des causes identiques, était formé de causes variant de temps à autre, la moyenne ne peut plus être regardée comme représentant les individus de l'ensemble, mais elle intervient toujours légitimement, dans les comparaisons, comme représentant la collectivité.

On comparera utilement le salaire moyen ou le revenu moyen de deux groupes de personnes, bien que le salaire ou le revenu de quelques-unes de ces personnes soit peut être très éloigné de la moyenne et ne puisse à aucun titre être regardé comme en fournissant une valeur approchée.

Dans tous les cas, un groupe d'observations pris dans l'ensemble ne représente cet ensemble, et ne comporte à peu près la même moyenne que lui, que si la distribution du groupe est conforme à celle de l'ensemble, sauf ce qui tient au nombre différent des observations. Au surplus, quand des distributions de grandeurs s'écartent de la distribution normale, la distribution des moyennes se rapproche davantage de la distribution normale; il est par suite toujours possible de mesurer le degré de confiance à attribuer à chaque moyenne en calculant l'écart type.

La détermination de la dispersion relative de toute distribution étudiée, par rapport à celle de la distribution normale, résulte à posteriori du calcul de l'écart type. Ce calcul peut être effectué de deux façons. D'abord directement, en formant la moyenne des carrés des écarts des observations par rapport à leur moyenne; en second lieu en imaginant le schema de causes identiques que nous avons deja considéré, et en déterminant la moyenne ainsi que l'écart type théorique que comporte le jeu de chaque cause, à l'aide de la moyenne et de l'écart type des observations: les moyennes sont égales, les écarts types sont liés par la loi de la racine carrée du nombre des causes. La comparaison de l'écart type calculé directement et de l'écart type théorique fixe le choix de l'hypothèse à faire sur les causes: celle de la cause permanente si l'écart type effectif est inférieur à l'écart type théorique; celle des causes variables dans le cas contraire.

De nombreuses séries d'observations naturelles peuvent être représentées par les courbes théoriques décrites ci-dessus, avec une approximation plus ou moins grande. On a souvent intérêt à remplacer la série des observations par la distribution théorique simple qui s'y adapte le mieux parce que l'étude de la série, d'après sa représentation approchée, peut être poussée plus avant, bien qu'elle ne comporte pas une parfaite exactitude. C'est ainsi que l'on calcule l'écart type d'un ensemble composé de plusieurs groupes d'après la valeur des écarts types des groupes composants, en supposant que les distributions des groupes et celles de l'ensemble se conforment à la distribution théorique.

De même on calcule la valeur moyenne d'un ensemble et l'on détermine le degré de confiance à attribuer à cette moyenne, c'est-à-dire sa variabilité dans l'ensemble des valeurs qu'elle pourrait avoir, d'après la valeur moyenne et l'écart type d'un échantillon puisé dans cet ensemble.

Quant à l'analyse de l'ensemble, on y procède en décomposant cet ensemble en groupes que l'on s'efforce de constituer de façon à obtenir des distributions conformes au schéma théorique. Par exemple une population dont on étudie la mortalité sera décomposée en groupes où la variabilité de la mortalité est moindre que dans la population générale; puis chacun de ces derniers en sous-groupes où la variabilité est moindre encore jusqu'à ce qu'on atteigne une variabilité normale au sens indiqué précédemment. Alors il n'y a généralement plus intérêt de décomposer le dernier groupement. On a séparé aussi bien que possible les influences qui déterminent d'une façon plausible les changements de la mortalité d'un groupe à l'autre: âge, sexe, profession, habitation, etc. Toutefois il faut prendre garde qu'en multipliant les divisions on réduit le nombre des individus de chaque groupe; or, la variabilité dans un groupe augmentant à mesure que le nombre des individus diminue, on accroît cette variabilité par la division, en même temps qu'on la diminue en rendant les groupes plus homogènes. L'opération ne comporte pas de limite fixe: mais en mesurant constamment la variabilité, on dispose d'un guide éprouvé; on acquiert une connaissance de plus en plus complète du phénomène: le jugement de l'observateur s'appuie sur des repères indépendants de sa personnalité.

Cette décomposition d'un ensemble d'observations constitue en somme un procédé d'analyse par tâtonnements. On a cherché à l'opérer en quelque sorte mécaniquement, par exemple quand l'ensemble des décédés de tous âges — dont la variabilité est grande et irrégulière — a été décomposée en cinq groupes dont chacun présente une variabilité à peu près normale.

Nous avons dit plus haut que la variabilité se mesure d'une façon sommaire, synthétique, par l'écart type. Cette mesure est absolue; on obtient une mesure relative en rapportant l'écart type à la valeur moyenne des observations; c'est ainsi que certaines distributions de salaires ou de revenus présentent avec le temps une variabilité croissante en valeur absolue mais constante en valeur relative.

La mesure de la variabilité à l'intérieur d'un groupe d'observations, ou dans ses changements d'un groupe à l'autre, comporte une certaine précision quand les classements sont numériques ou quantitatifs. On a étendu la notion de la variabilité aux cas où les observations ne peuvent se classer que d'après un ordre qualitatif, moyennant l'hypothèse que la distribution se conforme à la loi normale. On peut alors apprécier les différences qui existent d'une observation à l'autre. Un exemple remarquable est celui de la répartition d'une somme entre les deux premiers d'une liste de concurrents rangés par ordre de mérite. Cette répartition dépend du nombre des concurrents, mais, entre les deux premiers, elle varie peu avec ce nombre et l'on a pu évaluer les fractions du prix total qu'il convenait d'attribuer, soit au premier soit au second de la liste.

Les procédés qui viennent d'être signalés s'appliquent à l'étude de la variabilité des observations à l'intérieur d'un ensemble dont les parties sont liées par des caractères communs, sont soumises à des influences communes, nombreuses et difficiles à séparer. Ces procédés sont fondés sur l'interpolation, ou plutôt sur l'ajustement d'une série d'observations, classées par ordre de grandeur, à une forme théorique: on admet que les caractères autres que celui de la grandeur, ou de la qualité observée, ne peuvent être suffisamment dissociés, de façon que l'un d'eux puisse varier indépendamment des autres.

Quand on classe les observations d'après un caractère particulier, par exemple: population dont on étudie la mortalité par groupes d'âge, ou bien mouvement d'un phénomène dans le temps, l'étude se présente sous un double aspect: 1. quand les observations sont simplement classées d'après leur grandeur, c'est le cas qui vient d'être traité — par exemple si l'on considère les taux de mortalité aux différents âges, en différentes années etc., comme des éléments variables autour de leur moyenne grandeur, quelle que soit la valeur du caractère choisi comme base du classement; 2. quand les grandeurs observées sont classées, non pas par ordre de grandeur, mais d'après le caractère qui a été séparé des autres, par exemple d'après l'âge, ou d'après l'année dans lequel s'est produit le phénomène étudié. Le dernier mode de classification n'est pas spécial à la méthode statistique: il est identique, d'après l'hypothèse même, à celui que l'on applique dans les sciences expérimentales. Le premier mode de classement ayant été analysé plus haut, pour compléter l'examen des procédés du traitement statistique des observations, il nous reste à parler de la comparaison des variabilités des éléments classés dans des ensembles du second genre.

En vertu de la règle la plus générale de la logique, celle des variations concomitantes, la concordance des variations concomitantes de deux grandeurs permet *d'inférer* que ces grandeurs sont soumises à des influences communes. Mais il s'agit, dans le cas général, d'une simple inférence tandis que, dans les cas particuliers où les influences prépondérantes peuvent être à volonté maintenues ou supprimées, on atteint la certitude logique. Il est vrai que pour régler notre conduite nous ne pouvons toujours compter sur des cas particuliers de ce genre qui sont purement théoriques, bien que parfois semblables de très près à ceux que présente la vie pratique. Dans de nombreuses circonstances nous n'avons, pour apprécier les liens qui unissent deux phénomènes, et pour fonder nos prévisions, que la concordance universellement constatée des variations.

Toutefois, l'application de la méthode des variations concomitantes ne prouve pas que la concordance des variations répond à une liaison parfaite des choses comparées ni que la non concordance correspond à l'absence de liaison. Dans un vase plein d'eau dont on fait varier le niveau, une pierre et un bouchon se comportent très différemment à l'égard des changements de niveau: cependant les deux objets sont également sensibles aux effets du niveau de l'eau; c'est en eux-mêmes que se trouve l'explication de la différence des mouvements. A la vérité la méthode est souvent la seule dont on dispose pour guider le jugement; rares sont les cas où elle comporte une sécurité analogue à celle que donne la faculté de dissocier les causes d'un phénomène de telle façon qu'une seule varie. Son mécanisme est simple. Lorsque l'on compare deux séries d'observations, on peut représenter les variations des grandeurs des deux séries en portant dans un plan, sur un axe horizontal, les valeurs successives de l'une des grandeurs comparées et sur un axe vertical les valeurs successives de l'autre. Les points du plan, définis par les coordonnées ainsi déterminées, dessinent une courbe qui représente le mode de liaison des grandeurs comparées; telle est par exemple la courbe qui représente la variation de la pression d'un certain poids d'un gaz dont le volume varie. Dans cet exemple, la courbe offre une certaine régularité, et une analogie satisfaisante avec un type de courbe connu, d'où la loi du phénomène; on a trouvé cette loi parce qu'on a pu dégager les deux grandeurs variables des autres influences susceptibles de les modifier d'une façon appréciable.

S'il n'en est point ainsi, la disposition des points dans le plan est plus ou moins irrégulière, tel est le cas quand il s'agit, par exemple, de comparer les changements de la natalité et ceux de la mortalité infantile, alors qu'il est impossible de faire varier ces éléments indépendamment des autres circonstances qui peuvent les modifier. Il importe pourtant de donner quelque-précision à la comparaison car, dans une foule de circonstances, on fonde des jugements sur des comparaisons de ce genre, par exemple quand on associe les changements de temps aux phases de la lune, sans justification suffisante.

Le graphique qui représente l'association de deux phénomènes variables peut être établi autrement. Tout à l'heure, en représentant par exemple le volume et la pression d'un gaz, nous avons négligé le fait que les observations n'étaient point simultanées. Cela n'offrait pas d'inconvénient parce que la loi du phénomène est indépendante du temps. Nous aurions pu cependant ordonner les deux grandeurs comparées par rapport au temps, et alors remplacer la courbe unique du tracé précédent par deux courbes dont les abscisses seraient graduées en unités de temps, tandis que les ordonnées représenteraient, pour l'une, les volumes successifs du gaz, pour l'autre les pressions. Pour éviter l'influence du rapport de l'unité de mesure du volume à l'unité de mesure de la pression mesurons les ordonnées de chaque courbe a partir de leur valeur moyenne. En un certain sens, on est maître de la forme de l'une des courbes, puisqu'on peut, à chaque moment, donner par exemple au volume telle valeur choisie; au même moment la pression aura la valeur correspondante fournie par la courbe du premier tracé. Mais le nouveau tracé n'indiquera généralement plus, à première vue, la relation de grandeur que le premier signalait quand on constatait une analogie avec une courbe connue. Seule une relation numérique convenablement choisie, calculée entre les ordonnées correspondantes des deux courbes, révèlera, par sa constance relative, la loi que signalait la courbe unique du premier tracé. Si la loi était telle qu'à tout changement de l'une des grandeurs correspondît un changement de même sens et proportionnel de l'autre, — exemple la loi de dilatation, — alors la courbe du premier tracé eut été une ligne droite et les deux courbes du second eussent été parallèles, les unités de mesure des ordonnées étant convenablement choisies.

Dans l'étude comparative des observations naturelles qui résultent de causes multiples, les seuls rapports qu'il soit possible d'apprécier, en raison de la complexité inévitable de la courbe qui représenterait les observations dans le premier tracé, sont des rapports de cette dernière espèce. Dans le premier tracé, il peut arriver que les points , tout en étant disséminés sur le plan, manifestent cependant des masses qui se disposent suivant une certaine direction, de sorte que, dans le second tracé, les courbes, sans être parallèles, offrent cependant une certaine ressemblance. Or nous apprécions constamment les analogies qui peuvent exister entre des phénomènes variables, en comparant les courbes qui représentent les mouvements de ces phénomènes: par exemple, rapports entre les récoltes et les pluies, entre la mortalité et la température, entre les caractères des pères et ceux de leurs enfants, etc. Et l'on procède à ces comparaisons sans moyen de les préciser et de les rendre observables de la même façon par tous les observateurs.

C'est cette absence de méthode à laquelle on remédie en cherchant une commune mesure de la ressemblance ou de la dissemblance des courbes statistiques. La ressemblance est parfaite si les courbes sont parallèles en toutes leurs parties, de même si elles deviennent parallèles après qu'on a modifié les unités de mesure des ordonnées. On peut encore la regarder comme parfaite, en sens contraire, si le parallélisme apparait après rotation de l'une des courbes autour de l'axe commun d'où partent les ordonnées, auquel cas on peut dire qu'avant la rotation elles étaient antiparallèles.

Quant à la dissemblance absolue, on est naturellement amené à la concevoir quand il y a, dans les deux courbes, autant de parties accusant un parallélisme parfait que de parties dont l'antiparallélisme est également parfait. Si la concordance des mouvements des deux phénomènes est aussi fréquente que leur discordance, ces mouvements n'offrent pas la moindre analogie.

Entre les deux extrêmes: concordance (ou discordance) constante et parfaite, et égalité entre les concordances et les discordances; se placent tous les cas de ressemblance ou d'analogie plus ou moins complète des deux courbes. On mesure cette ressemblance, à l'aide, soit d'un indice, soit d'un coefficient de *covariation* dont la grandeur est comprise entre 0 et 1, et dont la formule tient compte du nombre des concordances et des discordances constatées. Le coefficient, représenté sur le premier tracé, marquerait la position d'une droite, relativement à chacun des axes de coordonnées, donc, en général, les positions de deux droites du plan. Ces droites sont confondues avec les axes de coordonnées quand les courbes du second tracé n'ont aucune analogie; elles se rapprochent de plus en plus, suivant la ressemblance des deux courbes, et coïncident quand les courbes du second tracé sont parallèles ou antiparallèles.

A l'aide du coefficient de covariation on peut apprécier la valeur d'une ordonnée de l'une des courbes à l'aide de l'ordonnée correspondante de l'autre. Par exemple si l'on compare la natalité et la mortalité infantile, année par année durant une certaine période, on peut à l'aide du coefficient de covariation évaluer, en moyenne, la mortalité en fonction de la natalité, ou inversement, cette évaluation constituant une appréciation moyenne pour l'ensemble de la période. On a ainsi réalisé un procédé, en quelque sorte mécanique, de comparaison des courbes, qui révèle leur similitude indépendamment de l'observateur.

Mais il importe de ne pas perdre de vue l'hypothèse initiale d'après laquelle la ressemblance des variations des deux phénomènes comparés est appréciée, uniquement, sous la forme d'une relation linéaire vérifiée pour un certain nombre d'observations. Par conséquent, du fait que la ressemblance est parfaite, le coefficient de covariation égal à unité, il ne résulte pas nécessairement que les deux phénomènes sont liés par une loi valable pour toutes les observations possibles de même ordre. Par exemple si dans un pays l'accroissement de la richesse, constaté par périodes décennales, est parallele à l'accroissement de la population, il n'en résulte pas que les deux phénomènes sont indissolublement liés, qu'il suffise de connaître la population à une année quelconque pour en déduire l'état de la richesse, car la relation peut être toute autre dans le cours d'une periode.

A l'autre bout de l'échelle, du fait que le coefficient de covariation est nul, il ne résulte en aucune façon que les deux phénomènes comparés sont indépendants. Par exemple, si l'on calcule le coefficient de covariation entre les déplacements successifs d'une locomotive et les mouvements du piston, on obtiendra un coefficient nul, bien que la liaison des deux mouvements soit à peu près parfaite. L'instrument de comparaison est donc défectueux, mais, jusqu'à présent, on n'en a pas d'autre pour guider et rectifier l'observation habituelle des faits qui ne peuvent être étudiés par les méthodes d'isolement. La méthode ne dispense donc nullement d'analyser les faits comparés, par d'autres voies, en les décrivant aussi complètement que possible; c'est cette analyse seule qui peut déterminer la confiance à attribuer au coefficient calculé.

Si ce coefficient mérite confiance, on peut alors déterminer ses valeurs quand on déplace les courbes comparées, quand on *décale* l'une d'elles par rapport à l'autre; la valeur maximum obtenue indique quel est le phénomène dont le changement précède celui de l'autre phénomène. Si donc on a admis que les deux phénomènes dépendent l'un de l'autre on sait quel est celui qui gouverne l'autre. C'est ainsi que, dans certains pays au moins, on peut constater l'influence de la mortalité infantile sur la natalité.

Le même procédé de comparaison des changements concomitants ou consécutifs a été étendu au cas de plusieurs phénomènes concourants. Le coefficient de covariation applicable à plusieurs grandeurs dépend alors de coefficients de covariation partielle applicables à un nombre moindre de grandeurs.

Sa valeur est soumise aux même réserves que celle du coefficient dépendant de deux variables, et, comme les phénomènes sont alors plus complexes, plus difficiles à décrire dans leur combinaison, la signification du coefficient est généralement beaucoup plus incertaine que celle d'un coefficient partiel.

Une autre extension de la méthode consiste à appliquer, sous certaines hypothèses, les calculs précédents aux cas où les grandeurs comparées se classent, non plus par degrés numériques, mais suivant un ordre de propriétés qualitatives. Les coefficients obtenus n'ont naturellement d'autre valeur que celle des hypothèses de base.

Mais d'autres procédés semblent mieux appropriés au traitement des observations qualitatives.

Ainsi, on classe des enfants suivant un caractère, supposé en partie trasmissible par hérédité, par exemple la couleur des cheveux, celle des yeux, etc., les diverses modalités du caractère considéré étant disposées dans un ordre conventionnel; on indique, dans chaque classe, la répartition des enfants qui y sont compris, suivant les modalités du même caractère observé chez leurs pères. Le tableau ainsi dressé peut être remplacé par un autre, à double entrée, dans lequel tous les nombres du tableau précédent sont remplacés par des nombres proportionnels, de façon que leur total soit égal à un nombre fixé d'avance, 1000 par exemple. Chaque nombre de ce dernier tableau peut alors être comparé à un nombre théorique qui correspondrait à l'indépendance complète des pères et des fils sous le rapport du caractère étudié. L'écart absolu ou relatif entre les deux nombres caractérise la dépendance apparente des fils à l'égard des pères, quand à l'hérédité du caractère étudié ou, suivant l'expression proposée, la *contingence* de la distribution constatée chez les fils d'une part, chez les pères de l'autre.

D'autres procédés de comparaison ont été proposés pour les cas où un classement quantitatif étant impossible, ou trop arbitraire, on doit se borner à classer les observations dans un certain ordre. Nous avons signalé déjà les éléments caractéristiques: médiane, quartiles, percentiles etc., qui permettent une première comparaison. de divers ensembles d'observations.

Supposons que l'on veuille examiner en quelle mesure, dans les diverses subdivisions d'un pays, la natalité varie comme la nuptialité. On peut s'en rendre compte en classant les subdivisions dans l'ordre décroissant de la nuptialité, ce qui permettra de représenter le mouvement par une courbe statistique, puis on construira une seconde courbe, à échelle convenable, représentant les grandeurs correspondantes du coefficient de natalité.

L'écart des deux courbes, facile à exprimer par un indice moyen unique, donne une idée satisfaisante de la covariation des deux phénomènes: nuptialité, natalité.

Au cours de l'exposé qui précède, des réserves ont été formulées qui paraîtront peut-être amoindrir à l'excès la portée de la méthode statistique. Peut-être ceux qui redouteraient cet amoindrissement, et ceux qui s'en réjouiraient, se font-ils une fausse idée de la portée du savoir. Savoir a-t-on dit c'est pouvoir. Mais la faculté d'agir n'exige pas une connaissance parfaite; point besoin d'un déterminisme absolu pour régler sa conduite: une connaissance approximative des choses, une appréciation moyenne des conséquences de tel ou tel acte est souvent suffisante; d'autre part on peut n'atteindre le résultat visé qu'après des tâtonnements qu'il importe seulement de bien diriger.

Une compagnie n'a pas besoin, pour assurer une personne sur la vie, de connaître exactement son état de santé, lorsqu'on sait qu'elle n'est point en danger de mort prochaine. Dès qu'on est fixé sur ce point, il suffit que la prime d'assurances couvre, outre les frais, le risque moyen de mort, précisé aussi bien que possible. C'est cette précision que l'on mesure par l'application de la méthode statistique. La moyenne n'est d'ailleurs pas nécessairement la meilleure valeur en toute circonstance. Si, devant quitter une réunion interessante de 10 personnes pour prendre un train, on consulte les 10 montres et l'on prend l'heure moyenne, l'opération est raisonnable. Mais on s'en rapportera, avec plus de raison peut-être à la montre de celui qui affirme l'avoir réglée à la gare, ou sur celle d'un autre compagnon dont on connait l'exactitude; mieux encore en ne se fiant pas trop à aucune montre et s'assurant quelque avance. Les calculs auxquels on peut soumettre les observations aident le jugement mais ne sauraient le déterminer. Quand on déclare que la statistique, ou le tableau numérique qu'elle présente, ne prouve rien, on affirme une vérité évidente ou une erreur voulue. Vérité évidente si l'on entend que la statistique, opérant sur des observations de faits, ne donne pas autre chose que le contenu des faits. Et l'on sait que, en eux-mêmes, des faits n'ont jamais rien prouvé. Erreur voulue, si l'on entend que de la comparaison méthodique des observations il ne ressort aucun enseignement. Il est vrai que l'on perd aisément de vue la nécessité de la méthode, qu'en particulier on décore du nom de statistique toute combinaison de chiffres, même, et surtout, dirigée par des idées préconçues. Le but de la méthode est précisément, non pas de diriger le jugement, mais d'empêcher qu'il ne soit vicié par des idées préconçues ou de fausses manoeuvres. Les régularités, que l'on cherche toujours avec passion, parce qu'elles inspirent la conduite, doivent résulter non de vues à priori mais de l'analyse statistique des faits observés.

Dégager les constatations des vues théoriques ou des tendances personnelles qui peuvent les fausser, déterminer des rapports numériques aussi précis que le comporte la matière, fixer le degré de confiance que méritent ces rapports, indiquer dans quelle mesure ils peuvent être généralisés: c'est classer les observations dans des cadres judicieusement délimités, ce qui est l'un des buts essentiels de la science

Au voisinage de la limite idéale où chaque phénomène résulte d'une cause déterminante dont les effets peuvent être étudiés indépendamment de ceux des autres influences, toute régularité de ces effets justifie des prévisions certaines. A mesure que l'on s'éloigne de cette limite, l'incertitude augmente; mais, comme la vie commande d'agir dans l'incertain et de raisonner sur l'incertain, une discipline d'esprit est nécessaire; autrement on combat des chiffres par d'autres chiffres, comme on combat des arguments par d'autres arguments, tant que des règles plus ou moins conventionnelles, mais communément acceptées, ne s'imposent pas. Une discipline qui ordonne la pensée, précise le jugement (et non, comme on l'a dit trop spirituellement, les choses que l'on ignore) et l'empêche de s'égarer, offre bien les caractères d'une discipline scientifique.

Bien qu'il ne soit plus possible de relier par une formule générale simple chaque fait particulier d'une certaine espèce à un antécédent, de nouvelles liaisons apparaissent entre les collectivités de faits. De sorte que la loi physique fait place à la loi statistique, d'essence plus générale, en quelque sorte, mais moins précise.

Il semblerait qu'en s'éloignant de plus en plus du cas idéal où la loi physique aurait une absolue rigidité, la notion de loi physique, se transformant en celle, plus flottante, de loi statistique, toute idée de loi devrait finir par disparaître.

Peut-être y-a-t-il quelque inconvénient à employer le même mot pour désigner, d'une part le cadre presque rigide où se classent les variations dont la dépendance est attestée par l'expérimentation: loi de la dilatation, loi de la chute des corps, loi des proportions définies et, d'autre part, le cadre beaucoup plus élastique où les variations, tantôt sont dans une dépendance assez étroite: loi de la sexualité des naissances, loi de la variation de la mortalité avec l'âge, tantôt sont moins étroitement liées: lois de l'hérédité, lois du mouvement économique. Peut-être y-a-t-il quelque inconvénient à employer le même mot pour désigner, d'une part le cadre rigide et étroit où varient tous les phénomènes d'une certaine classe et le cadre plus élastique, plus large aussi, où varient des classes de phénomènes et non plus les phénomènes particuliers eux-mêmes. Ainsi la loi de la dilatation s'applique à très peu près à tous les corps inorganiques, pris individuellement, avec des modalités peu différentes, tandis que la loi de la mortalité suivant l'âge, où celle du mouvement des prix en rapport avec l'activité économique, ne sont applicables qu'à des ensembles d'individus ou de phénomènes et pas nécessairement à un individu ou à un phénomène particulier.

L'inconvénient n'est cependant pas très grand quand les variations comparées des phénomènes collectifs concordent à peu près aussi bien que celle dont les lois physiques résument les rapports, c'est pourquoi il importe de mesurer le degré de concordance, faute de quoi l'on s'expose à des assimilations outrées. C'est ainsi que l'observation vulgaire apprécie souvent assez mal les causes et les rapports véritables.

Sans doute les lois physiques elles-mêmes ne sont qu'approchées, mais on sait dans quelles limites elles le sont; les lois statistiques ne méritent ce nom que lorqu'il est possible également de fixer des limites à l'intérieur desquelles elles sont dignes de confiance: c'est là l'un des principaux buts de la méthode.

Dans son domaine, la méthode expérimentale comporte une application en quelque sorte mécanique des règles de la logique; grâce aux instruments, elle pénètre le mécanisme des phénomènes, qui sans eux nous échappe, et elle donne ainsi le moyen de déceler peu à peu les influences les plus secrètes, d'en débrouiller la complexité. De sorte que l'expérimentateur trouve, dans l'application de la méthode, des guides rigides dont il ne saurait s'écarter.

L'application de la méthode statistique ne comporte pas les mêmes facilités. La voie ouverte au jugement est beaucoup plus large, des embûches la sillonnent; la méthode permet seulement d'établir des repères qui aident le chercheur averti. Ces repères sont d'autant plus précieux qu'il n'y a pas d'autre voie pour atteindre la connaissance de la plupart des faits dont dépend notre vie.

Notre connaissance des choses est aussi précise que possible, et adéquate à notre manière de les concevoir, quand la notion d'une cause déterminante dominant toutes les autres permet de mettre en évidence des régularités que l'expérience vérifie. Elle est ensuite flottante dans la région où les causes nous semblent mêlées, hors de notre atteinte, parce que le variable semble l'emporter sur le régulier. Elle reprend cependant une partie de ses caractères positifs quand la notion du hasard rétablit la pensée dans la forme où celle-ci envisageait la cause déterminante.

Les deux notions idéales, cause déterminante et hasard, sont comme deux pôles de la classification des faits dans l'ordre de la complexité; elles se rejoignent, ainsi que l'exige peut-être l'unité de la pensée. Vers l'un des points extrêmes, l'observation opère sur des individus (monographie ou monométrie); de l'autre côté l'observation s'exerce sur des masses, mesure des collectivités (pléthomètrie), autour du point où la collectivité prend figure d'individualité.

LUCIEN MARCH.

Über Funktionen von Variablen, zwischen welchen Korrelationen bestehen

1. Es ist eines der Hauptprobleme der Ausgleichungsrechnung, den Wert einer Funktion von Argumenten zu bestimmen, für die entweder unmittelbar beobachtete oder aus Beobachtungen abgeleitete Werte vorliegen, und zugleich ein Genauigkeitsmass für diese Bestimmung, etwa ihren mittleren Fehler, anzugeben.

Die Lösung dieser Aufgabe fällt verschieden aus, jenachdem die Werte der Argumente durch *direkte* Beobachtungen gefunden worden oder aus *vermittelnden* oder endlich aus *bedingten* Beobachtungen hervorgegangen sind.

Im ersten Falle besteht zwischen den Argumenten Unabhängigkeit, in den beiden andern Fällen sind sie voneinander abhängig, und zwar ist die Abhängigkeit bei vermittelnden Beobachtungen durch die Normalgleichungen, bei bedingten Beobachtungen durch die Bedingungsgleichungen dargestellt.

Am einfachsten gestaltet sich die Lösung bei Unabhängigkeit; daher werden, wenigstens bei der theoretischen Entwicklung, die beiden letzten Fälle auf den ersten zurückgeführt, indem man auf die Beobachtungen rekurriert, von denen man stets Unabhängigkeit voraussetzt.

Das Problem hat in der Statistik ein Seitenstück. Man soll den Wert einer Funktion ermitteln, deren Argumente Gegenstand statistischer Erhebung sind, und soll den Grad der Verlässlichkeit des gefundenen Funktionswertes angeben. Denn ohne eine solche Angabe ist die praktische Verwendbarkeit des Funktionswerts in Frage gestellt.

Auch hier müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Ist jedes Argument für sich durch eine Beobachtungsreihe dargestellt, so ist die Sachlage die einer Funktion unabhängiger Variablen.

Wurden aber *Wertverbindungen* der Variablen erhoben und bestehen zwischen den Variablen Korrelationen, so entspricht die Sachlage einer Funktion abhängiger Variablen.

Doch liegen dort und hier die Verhältnisse insofern verschieden, als es sich in der Ausgleichungsrechnung um Abhängigkeit im *funktionalen* Sinne handelt, während in der Statistik bloss *korrelative* Abhängigkeit besteht, deren Wesen sich darin ausdrückt, dass einem ausgewählten Werte der einen Variablen nicht ein *bestimmter* Wert, sondern nur ein *Mittelwert* der andern entspricht.

Wir nehmen hier das zweite, das allgemeinere Problem auf, weil das erste mit ihm zugleich gelöst sein wird.

2. Es seien also $X_1, X_2, \dots X_n$ die n in Betracht kommenden Variablen, von welchen N Wertverbindungen an den N Individuen eines Kollektivs beobachtet worden sind. Für jede der Variablen liegen also N Werte vor, deren arithmetische Mittel M_1, $M_2 \dots M_n$ heissen sollen. Bezeichnet man die Abweichungen der Einzelwerte von X_i von M_i allgemein mit x_i; dann ist

$$(1) \qquad \Sigma(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Nun sei das Interesse auf eine Funktion

$$(2) \qquad V = f(X_1, X_2, \dots X_n)$$

gerichtet; zu jeder Wertverbindung der Variablen gehört ein Wert von V, und da alle Wertverbindungen als gleichberechtigt zu gelten haben, so gilt dies auch von den N Werten von V; somit ist

$$(3) \qquad M = \frac{1}{N} \Sigma(V)$$

die vorteilhafteste Bestimmung von V auf dieser Grundlage. Es handelt sich dann noch um ein Mass ihrer Verlässlickeit : als solches soll die mittlere quadratische Abweichung der einzelnen V von ihrem Mittel dienen, aus der auch die mittlere Abweichung des M selbst gewonnen werden kann.

Bei der Durchführung dieses Gedankens sei vorausgesetzt, dass die Abweichungen x_i im Vergleich zu M_i kleine Beträge sind, die sich bei entsprechender Wahl der Masseinheit für X_i durch genügend kleine echte Brüche ausdrücken. Wir setzen des weiteren fest, dass eben aus diesem Gesichtspunkte bei der Entwicklung von

$$V = f(M_1 + x_1, M_2 + x_2, \dots M_n + x_n)$$

über Glieder zweiter Ordnung in den x nicht hinausgegangen werden soll. Führt man also die folgenden Bezeichnungen ein:

$$f(M_1, M_2, \dots M_n) = f$$

$$\frac{\partial f}{\partial M_1} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial M_2} = f_2, \dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial M_1^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_1 \partial M_2} = f_{12}, \dots$$

so lautet die so abgekürzte Entwicklung:

$$V = f + f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$$

$$(4) + \frac{1}{2}(f_{11} x_1^2 + f_{22} x_2^2 + \dots + f_{nn} x_n^2) + f_{12} x_1 x_2 + f_{13} x_1 x_3 + \dots + f_{23} x_2 x_3 + \dots$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (1):

$$\Sigma(V) = Nf + \frac{1}{2}\left[f_{11}\,\Sigma(x_1^2) + f_{22}\,\Sigma(x_2^2) + \dots + f_{nn}\,\Sigma(x_n^1)\right]$$
$$+ f_{12}\,\Sigma(x_1 x_2) + f_{13}\,\Sigma(x_1 x_3) + \dots + f_{23}\,\Sigma(x_2 x_3) + \dots$$

und weiter, entsprechend (3):

$$M = f + \frac{1}{2}\left[f_{11}\frac{\Sigma(x_1^2)}{N} + f_{22}\frac{\Sigma(x_2^2)}{N} + \dots + f_{nn}\frac{\Sigma(x_n^2)}{N}\right]$$
$$+ f_{12}\frac{\Sigma(x_1 x_2)}{N} + f_{13}\frac{\Sigma(x_1 x_3)}{N} + \dots + f_{23}\frac{\Sigma(x_2 x_3)}{N} + \dots$$

Nun ist aber

$$\frac{\Sigma(x_1^2)}{N} = \mu_i^2,$$

wenn μ_i die mittlere quadratische Abweichung der Einzelwerte des X_i von ihrem arithmetischen Mittel M_i bedeutet; ferner drückt sich der *Korrelationskoeffizient* des Variablenpaars X_i, X_k durch die Formel

$$r_{ik} = \frac{\Sigma(x_i x_k)}{N\mu_i\mu_k}$$

aus. Hiernach ist zu schreiben

$$\text{(I)} \qquad M = f + \frac{1}{2}\left[f_{11}\mu_1^2 + f_{22}\mu_2^2 + \ldots + f_{nn}\mu_n^2\right.$$

$$\left. + f_{12}\mu_1\mu_2 r_{12} + f_{12}\mu_1\mu_3 r_{13} + \ldots + f_{23}\mu_2\mu_3 r_{23} + \ldots\right]$$

Bezeichnet man die mittlere quadratische Abweichung der Einzelbestimmumg von V mit μ, so ist nach einem bekannten Satze

$$M^2 + \mu^2 = \frac{1}{N}\Sigma(V^2).$$

Wird V^2 auf Grund von (4) mit demselben Grade der Approximation gebildet wie V selbst, so entsteht

$$V^2 = f^2 + 2f(f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n) + f_1^2x_1^2 + f_2^2x_2^2 + \ldots + f_n^2x_n^2$$

$$+ 2f_1f_2x_1x_2 + 2f_1f_3x_1x_3 + \ldots + 2f_2f_3x_2x_3 + \ldots$$

$$+ f(f_{11}x_1^2 + f_{22}x_2^2 + \ldots + f_{nn}x_n^2) + 2f(f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_1x_3 + \ldots + f_{23}x_2x_3 + \ldots).$$

Daraus geht nach dem Vorausgeschickten

$$\frac{1}{N}\Sigma(V^2) = f^2 + f_1^2\mu_1^2 + f_2^2\mu_2^2 + \ldots + f_n^2\mu_n^2 + f(f_{11}\mu_1^2 + f_{22}\mu_2^2 + \ldots + f_{nn}\mu_n^2)$$

$$+ 2f_1f_2\mu_1\mu_2r_{12} + 2f_1f_3\mu_1\mu_3r_{13} + \ldots + 2f_2f_3\mu_2\mu_3r_{23} + \ldots$$

$$+ 2f(f_{12}\mu_1\mu_2r_{12} + f_{13}\mu_1\mu_3r_{13} + \ldots + f_{23}\mu_2\mu_3r_{23} + \ldots)$$

hervor, und bringt man davon das aus (I) gebildete Quadrat von M in Abzug, so ergibt dich

$$\text{(II)} \qquad \mu^2 = f_1^2\mu_1^2 + f_2^2\mu_2^2 + \ldots + f_n^2\mu_n^2$$

$$+ 2f_1f_2\mu_1\mu_2r_{12} + 2f_1f_3\mu_1\mu_3r_{13} + \ldots + 2f_2f_3\mu_2\mu_3r_{23} + \ldots$$

In den Formeln (I) und (II) liegt die Lösung der Aufgabe. Es erübrigt noch die Bestimmung von μ_M, diese ist aber gegeben durch

$$\text{(III)} \qquad \mu_M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Sind die Variablen von einander unabhängig, also auch korrelationslos, so sind alle $r_{ik} = O$ und es ergeben sich die einfacheren Formeln

$$\text{(I*)} \qquad M = f + \frac{1}{2}\left(f_{11}\,\mu_1^2 + f_{22}\,\mu_2^2 + \ldots + f_{nn}\,\mu_n^2\right)$$

$$\text{(II*)} \qquad \mu^2 = f_1^2\,\mu_1^2 + f_2^2\,\mu_2^2 + \ldots + f_n^2\,\mu_n^2.$$

Ist insbesondere f eine *lineare* Funktion, so verschwinden auch alle f_{ik} und man hat den noch einfacheren, aus der Fehlertheorie bekannten Fall mit

$$\text{(I**)} \qquad M = f$$

$$\text{(II**)} \qquad \mu^2 = f_1^2\,\mu_1^2 + f_2^2\,\mu_2^2 + \ldots + f_n^2\,\mu_n^2.$$

3. Um eine Anwendung davon zu geben, behandeln wir den in der Statistik sehr häufig vorkommenden Fall, dass eine Massenerscheinung durch das *Verhältnis* zweier Variablen gekennzeichnet werden soll, die zueinander in Korrelation stehen.

Man hat dann

$$V = \frac{X_1}{X_2}$$

$$f = \frac{M_1}{M_2},\ f_1 = \frac{1}{M_2},\ f_2 = -\frac{M_1}{M_2^2};\ f_{11} = 0,\ f_{22} = \frac{2M_1}{M_2^3},\ f_{12} = -\frac{1}{M_2^2}.$$

Hiermit erhält man auf Grund von (I) und (II):

$$M = \frac{M_1}{M_2} + \frac{M_1}{M_2^3}\,\mu_2^2 - \frac{\mu_1\,\mu_2}{M_2^2}\,r_{12}$$

$$\mu^2 = \frac{\mu_1^2}{M_2^2} + \frac{M_1^2}{M_2^4}\,\mu_2^2 - 2\,\frac{M_1}{M_2^3}\,\mu_1\,\mu_2\,r_{12}$$

und mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\frac{\mu_1}{M_1} = \alpha_1 \quad \frac{\mu_2}{M_2} = \alpha_2$$

für die Rechnung bequemer

$$M = \frac{M_1}{M_2}\left(1 + \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 r_{12}\right) \tag{III}$$

$$\mu_2 = \frac{M_1^2}{M_2^2}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\,\alpha_1 \alpha_2 r_{12}\right). \tag{IV}$$

Bei *negativer* Korrelation ist also stets $M > \frac{M_1}{M_2}$; bei *positiver* Korrelation kann ebensowohl $M > \frac{M_1}{M_2}$ wie auch $M < \frac{M_1}{M_2}$ und selbst $= \frac{M_1}{M_2}$ sein.

4. Als erstes Beispiel wählen wir die Erhebungen K. PEARSON (1) über die eheliche Fruchtbarkeit der Väter und ihrer Söhne, ausgeführt an 1000 englischen Peers-und Baronetsfamilien. Es wurden nur solche Fälle einbezogen, in welchen die Ehe des Sohnes entweder durch den Tod des einen Teils beendet war oder mindestens 15 Jahre gedauert hatte.

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl X_1 der Kinder des Vaters und die Anzahl X_2 der Kinder des Sohnes, wozu noch bemerkt sei, dass aus jeder Familie nur ein Sohn genommen wurde.

---

(1) *Phil. Trans. Roy. Soc.* A. Bd. 192 (1899), p. 289, 321.

		X_1																	Summe
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
X_2	0	5	8	7	14	18	2	2	3	8	3	4	4	-	-	-	-	-	78
	1	3	3	6	5	8	8	6	5	4	-	2	-	1	-	-	-	-	51
	2	7	5	6	13	12	12	12	6	5	4	2	1	1	-	-	-	-	86
	3	5	10	13	11	17	13	13	12	10	4	1	2	1	-	-	-	-	112
	4	4	16	18	24	23	5	18	10	7	8	1	5	2	1	-	-	1	143
	5	9	8	11	14	16	12	16	12	2	5	8	6	3	-	2	-	-	124
	6	3	4	10	16	13	11	11	10	10	1	2	2	1	-	-	-	-	94
	7	5	6	8	7	10	14	11	12	4	7	1	1	-	-	-	-	-	86
	8	3	5	4	15	19	7	10	8	4	2	2	1	-	-	1	-	-	81
	9	1	6	5	9	5	5	8	5	4	3	3	1	-	-	-	-	-	55
	10	2	3	9	3	2	5	4	6	4	3	1	1	1	-	-	-	-	44
	11	1	1	1	4	2	1	1	2	1	1	-	-	-	-	-	-	-	15
	12	-	-	2	2	2	-	1	1	1	2	-	1	-	-	-	-	-	12
	13	1	-	-	1	3	-	1	1	1	1	-	1	-	1	-	-	-	11
	14	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	3
	15	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	3
	16	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	2
Summe		49	76	101	138	150	96	114	94	66	45	29	26	10	2	3	-	1	1000

Aus den Summenreihen, welche die Gesamtverteilung von X_1 und X_2 darstellen, ergeben sich

$$M_1 = 5.83 \quad \mu_1 = 2.91$$
$$M_2 = 5.07 \quad \mu_2 = 3.14,$$

und aus der ganzen Tabelle berechnet sich der Korrelationskoeffizient

$$r_{12} = 0.0656;$$

mit Hilfe dieser Elemente findet man nach den Formeln (III) und (IV)

$$M = 1.568 \quad \mu = 0.885;$$

aus μ folgt die mittlere Abweichung von M selbst:

$$\mu_M = \frac{0.885}{\sqrt{1000}} = 0.028.$$

Als Schlussergebnis kann man aussprechen, dass das mittlere Verhältnis der Kinderzahl des Vaters zur Kinderzahl des Sohnes aus dem vorliegenden Material gleich 1.568 mit der mittleren Unsicherheit 0.028 sich ergibt. Bei der Beurteilung der ersten Zahl ist nicht ausseracht zu lassen, dass unter den Söhnen auch kinderlos gebliebene vorkommen, was bei den Vätern ausgeschlossen ist.

Dieselbe Rechnung auf eine von PEARSON in gleicher Weise und aus denselben Gesellschaftskreisen hergestellte Korrelationstabelle über die Fruchtbarkeit von Müttern und ihren Töchtern (1) ergibt

$$M = 1.901 \quad \mu = 1.016 \quad \mu_M = 0.032 ;$$

das weist auf ein deutlich verschiedenes Verhalten der beiden Geschlechter in Bezug auf Vererbung der Fruchtbarkeit hin.

5. S. D. WICKSELL (2) hat aus 1223 an der Gebärklinik in Lund beobachteten Geburten männlichen Geschlechts eine Korrelationstabelle über das Gewicht der Neugeborenen und das Gewicht der Placenta zusammengestellt. Sie ist nachstehend wiedergegeben.

	Gewicht des Kindes: X_1											Summe
Gewicht der Placenta: X_2	1850	2150	2450	2750	3050	3350	3650	3950	4250	4550	4850	
300	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	4
380	2	10	8	25	21	14	2	-	-	-	-	82
460	2	2	12	34	94	77	37	10	2	-	-	270
540	-	1	4	17	55	111	84	37	10	-	1	320
620	-	1	3	6	24	51	92	78	22	3	-	280
700	-	2	1	2	4	15	40	51	24	8	4	151
780	-	-	-	-	2	8	13	26	20	11	3	83
860	-	-	-	-	-	4	1	8	3	6	4	26
940	-	-	-	-	-	1	1	3	-	-	2	7
Summe	5	16	30	84	201	281	270	213	81	28	14	1223

(1) Ibid., p. 285, 319.
(2) *Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.* Uppsala, 1917.

Die aus ihr abgeleiteten Daten zur Bestimmung des Verhältnisses von Kindes- zu Placentagewicht sind die folgenden:

$$M_1 = 3490.55 \quad \mu_1 = 512.46 \text{ gr}$$
$$M_2 = 574.27 \quad \mu_2 = 117.35 \text{ »}$$
$$r_{12} = 0.6284$$

Man findet daraus

$$M = 6.218 \quad \mu = 0.999 \quad \mu_M = 0.032.$$

Es betrug hiernach in dem beobachteten Material im Mittel das Gewicht des Kindes 6.218 mal so viel als das Gewicht der Placenta und die mittlere Unsicherheit dieser Bestimmung ist bloss 0.032.

E. Czuber.

Sui coefficienti di variabilità

1. — Nel 1912 il Prof. GINI ha pubblicato uno studio, nel quale si mette in rilievo l'uso improprio, che per la misura della variabilità dei fenomeni comunemente si fa delle medie degli scostamenti tra le singole osservazioni e un valore medio di esse: e si propone di usare per taluni fenomeni, o per i fini ai quali quella misura è rivolta, medie di differenze (1).

Chiamando con a_i $(i = 1, 2, 3, \dots n)$ le osservazioni relative ad un dato fenomeno, e con a_k le osservazioni diverse da un valore di a_i, una media di differenze sarebbe fornita dall'espressione:

$$(1) \qquad \Delta = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} | a_i - a_k |$$

ossia dalla media aritmetica delle differenze assolute tra ogni osservazione e tutte le altre.

Poichè essa è indipendente dall'ordine di successione delle osservazioni, per il caso che fosse opportuno l'impiego di un indice sensibile all'ordine di successione medesimo si propone di calcolare la media aritmetica delle differenze assolute tra i valori contigui, ossia l'indice di oscillazione:

$$(2) \qquad O = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} | a_i - a_{i+1} |$$

2. — Applicando un indice di variabilità a diversi fenomeni, si ottengono risultati non sempre confrontabili fra loro; onde

(1) *Variabilità e Mutabilità,* in *Studi economico-giuridici della R. Università di Cagliari,* 1912.

sorge nella pratica statistica il bisogno di calcolare dei coefficienti di variabilità, ossia degli indici indipendenti dalla grandezza delle osservazioni.

E siccome, nei riguardi delle medie di scostamenti — malgrado le notevoli discussioni a cui il procedimento fu sottoposto, ed i serî inconvenienti ai quali in taluni casi esso dà luogo (1) — tali coefficienti sogliono ottenersi ragguagliando l'indice di variabilità alla media aritmetica, si è creduto di potere estendere tale procedimento anche all'indice Δ (2).

Ora a noi sembra che i criterî, sui quali tale estensione si fonda, siano suscettibili di un' utile revisione, indipendentemente da ogni divergenza di vedute intorno alla competenza delle medie di scostamenti o delle medie di differenze per la misura della variabilità.

Infatti, per quanto esteso sia il campo di applicazione che si voglia attribuire da taluni scrittori agli scostamenti medî, da altri alle differenze medie, nei casi in cui una media di differenze viene applicata può apparire incoerente il ragguaglio di essa a quel valore medio, dal quale si è voluto prescindere nel calcolo dell'indice di variabilità.

Nè sembra valida l'obbiezione che il valore massimo di una differenza media tra ogni osservazione e tutte le altre, calcolato nell'ipotesi limite che una sola osservazione assommi i valori di tutte, è uguale al doppio della media aritmetica della serie (3), e che quindi il ragguaglio della differenza media al suo valore massimo dedotto da quella ipotesi implica e giustifica il calcolo della media aritmetica.

Infatti in tal caso la media aritmetica attribuisce alla misura risultante un significato conforme all'ipotesi da cui essa deriva, ossia il significato di una misura della concentrazione; mentre, al fine di misurare la variabilità indipendentemente dalla grandezza delle osservazioni, qualunque ipotesi che si volesse escogitare a giustificazione della media aritmetica renderebbe per ciò stesso infondato l'uso di una media di differenze, in quanto giustificherebbe altresì l'applicazione di una media di scostamenti.

---

(1) Gini, *op. cit.*, p. 101.

(2) Cfr. ad es. G. Dettori. *Contributo allo studio della variabilità dei prezzi*, in *Studi economico-giuridici della R. Università di Cagliari*, 1912.

(3) Gini, *op. cit.*, p. 80.

3. — La considerazione dell'indice (2), dal quale non si è ancora pensato a trarre un coefficiente di variabilità, ci suggerirà la via da seguire per costruire, sulla base di medie di differenze in generale, coefficienti di variabilità indipendenti da qualsiasi valore medio delle serie.

Si noti, infatti, che l'oscillazione media di una serie di osservazioni di un dato fenomeno, essendo sensibile all'ordine di successione di esse, può essere solo giustificata allorquando esista ed interessi di rispettare il legame di dipendenza storica o di altra natura tra le osservazioni medesime; e che in tal caso il coefficiente di variabilità è dato logicamente da una media delle oscillazioni ragguagliate ai valori da cui esse provengono, ossia dall'oscillazione media relativa, desunta dall'espressione:

$$(3) \qquad \frac{O}{a_i} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|a_i - a_{i+1}|}{a_i}$$

Ora, considerando che la differenza media tra ogni osservazione e tutte le altre differisce dall'indice di oscillazione per il fatto che non è sensibile all'ordine in cui le osservazioni sono disposte, sembra legittimo calcolare il coefficiente di variabilità della prima per mezzo di differenze medie relative, indipendenti da qualsiasi ordine di successione, ossia in base all'espressione:

$$(4) \qquad \frac{\Delta}{a_i} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |a_i - a_k|}{a_i} \quad .$$

4. — Il calcolo della (3) non dà luogo a difficoltà; e di esso abbiamo fatto un'applicazione in un nostro studio sulle variazioni dei prezzi (1), al fine di comparare le variazioni medie delle serie dei numeri indici dei prezzi delle merci all'ingrosso e della circolazione monetaria in Italia durante la guerra.

Il calcolo della (4) si presenta, invece, così laborioso, appena le serie superino pochi termini, da riuscire praticamente impossibile se non si potesse ricorrere ad una formula semplificatrice.

Per fortuna tale formula esiste, e può ottenersi nel modo seguente:

---

(1) *Rivista delle Società Commerciali.* Roma, Athenaeum, Aprile 1919.

Graduando in ordine crescente le n osservazioni;

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

la somma delle $n-1$ differenze tra la prima quantità e tutte le altre, ragguagliate alla prima quantità, sarà:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_1} + \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_1} - (n-1)$$

Facendo analogamente la somma delle $n-1$ differenze tra la seconda quantità e tutte le altre, ragguagliate alla seconda quantità, si ottiene:

$$\frac{a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_2} + \frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_n}{a_2} - (n-2) + 1 - \frac{a_1}{a_2},$$

che conviene scrivere così:

$$\frac{a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_2} + \frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_n}{a_2} - (n-1) + 2 - \frac{a_1}{a_2}$$

Ripetendo quest'operazione per ogni quantità della serie, si ottiene infine lo specchio seguente:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_1} + \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_n}{a_1} - n + 1$$

$$\frac{a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_2} + \frac{a_{n-1}}{a_2} + \frac{a_n}{a_2} - (n-1) + 2 - \frac{a_1}{a_2}$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_3} + \frac{a_{n-1}}{a_3} + \frac{a_n}{a_3} - (n-2) + 3 - \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2}{a_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + \frac{a_n}{a_{n-2}} - 3 + (n-2) - \frac{a_1}{a_{n-2}} - \frac{a_2}{a_{n-2}} - \frac{a_3}{a_{n-2}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} - 2 + (n-1) - \frac{a_1}{a_{n-1}} - \frac{a_2}{a_{n-1}} - \frac{a_3}{a_{n-1}} - \ldots - \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$-1 + n - \frac{a_1}{a_n} - \frac{a_2}{a_n} - \frac{a_3}{a_n} - \ldots - \frac{a_{n-2}}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Sommando e riducendo, si avrà:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{A_i}{a_i} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}} \right)$$

dove $\frac{A_i}{a_i}$ è la somma delle quantità delle serie maggiori di a_i, ragguagliata al termine a_i; e $\frac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}}$ è la somma delle quantità non maggiori di a_{n-i} ragguagliata al termine a_{n-i+1}.

La differenza media relativa sarà, adunque:

$$(4^{bis}) \qquad \frac{\Delta}{a_i} = \frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{A_i}{a_i} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}} \right) \right]$$

5. — L'applicazione pratica di questa formula ne metterà in luce la singolare semplicità. Per fare un esempio, riportiamo nella tavola seguente i prezzi al minuto per chilogramma del pane di frumento e della carne bovina (bollito), rilevati da Municipi, Cooperative, ecc. in dieci città italiane alla vigilia della guerra europea ed alla vigilia dell'armistizio (1).

Città	Prezzi al minuto in lire per chilogramma			
	del pane di frumento		della carne bovina	
	Luglio 1914	Settembre 1918	Luglio 1914	Settembre 1918
Torino. . . .	0.38	0.66	1.60	7.50
Genova . . .	0.40	0.70	1.45	7.80
Milano. . . .	0.41	0.69	1.15	8.25
Bologna . . .	0.40	0.71	1.20	6.00
Firenze . . .	0.33	0.62	1.30	7.70
Ancona . . .	0.40	0.65	1.50	7.25
Roma	0.40	0.70	1.50	9.00
Napoli. . . .	0.38	0.65	1.70	12.10
Lecce	0.35	0.60	1.40	9.90
Girgenti . . .	0.36	0.64	2.20	6.35

(1) Cfr. *Annuario Statistico Italiano*, Anno 1915, pag. 169; e *Bollettino quindicinale dell' Ufficio del Lavoro*, Roma, 16 Marzo 1919, n 16. Codeste due fonti considerano due gruppi diversi di città, che però hanno in comune le dieci città, di cui ci occupiamo nel testo.

Considerando, anzitutto, i prezzi del pane, con la nota formula semplificatrice del GINI (1) si ottiene per il luglio 1914 una differenza media (Δ) di L. 0.030 e per il settembre 1918 di L. 0.044, maggiore della precedente.

Al fine di prescindere dai fattori di aumento dei prezzi nel secondo periodo, ragguagliando codeste misure alle medie aritmetiche che sono rispettivamente L. 0.38 e L. 0.66, si ottengono coefficienti $\left(\frac{\Delta}{M}\right)$ uguali a 0.078 e 0.066, dai quali si rileva che, prescindendo dalla grandezza media delle due serie, la seconda di esse presenterebbe una variabilità minore del 15.38 per cento di quella della prima.

Vediamo adesso a quali risultati conduce il metodo da noi precedentemente esposto.

Operando dapprima sulla serie dei prezzi accertati nel luglio 1914, si graduino i termini dal minimo al massimo (colonna 1 della tavola seguente).

Procedendo dal basso in alto, si costruiscano classi successive di valori, formate rispettivamente con l'ultimo termine, con questo e il precedente e così via (colonna 2); e si ragguagli ogni classe così ottenuta al valore antecedente, ossia $41 : 40 = 1.025$ ecc. (colonna 3).

Procedendo dall'alto in basso, si costruiscano classi successive di valori anologhe alle precedenti (colonna 4), e si ragguagli ogni classe così ottenuta al valore seguente (colonna 5).

Sottraendo la somma delle quantità della colonna 5 da quella delle quantità della colonna 3, e dividendo il risultato per $10 \times 9 = 90$, si ottiene:

$$\frac{\Delta}{a_i} = 0.080.$$

Operando ugualmente sulla serie dei prezzi accertati nel settembre 1918, si ottiene:

$$\frac{\Delta}{a_i} = 0.067.$$

---

(1) GINI, *op. cit.*, pp. 22 e 23.

da a_1 ad a_n	A_i	$\frac{A_i}{a_i}$	A_{n-i}	$\frac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}}$
1	2	3	4	5
0.33	3.81	—	0.33	0.943
0.35	3.48	105.45	0.68	1.888
0.36	3.13	89.43	1.04	2.736
0.38	2.77	76.94	1.42	3.736
0.38	2.39	62.89	1.80	4.500
0.40	2.01	52.89	2.20	5.500
0.40	1.61	40.25	2.60	6.500
0.40	1.21	30.25	3.00	7.500
0.40	0.81	20.25	3.40	8.292
0.41	0.41	10.25	3.81	—
Totali (1)	21.63	48.860	20.28	41.595

In ambedue i casi risultano valori maggiori di quelli dei coefficienti precedenti. e per la seconda serie una variabilità minore del 16.25 % di quella della prima.

Questo risultato, che, indipendentemente dai fattori generali di rialzo dei prezzi, mette in luce per le città considerate una notevole diminuzione nella variabilità dei prezzi del pane durante la guerra, si spiega facilmente con un insieme di circostanze, tra le quali è da notare l'uniformità imposta dal governo nell'abburattamento delle farine e nella qualità del pane, e l'azione livellatrice dei calmieri sui prezzi di esso.

In base ai prezzi della carne abbiamo ottenuto i risultati compresi nella tavola seguente, dove torniamo a riportare, per confronto, quelli già ottenuti sui prezzi del pane.

---

(1) Si noti che, sottraendo la somma degli A_{n-i} da quella degli A_i e moltiplicando il risultato per $\frac{2}{10 \times 9}$, si ottiene per altra via la differenza media Δ.

Questo nuovo metodo di calcolo è stato già proposto dallo Czuber (*Beitrag zur Theorie statistischer Reihen*, Wien 1914) ed è esposto dal Mortara nei suoi *Elementi di statistica*. Roma 1916, p. 173 e segg..

Indici	Variabilità dei prezzi del pane			Variabilità dei prezzi della carne		
	Luglio 1914	Settembre 1918	Differenze percentuali	Luglio 1914	Settembre 1918	Differenze percentuali
$\Delta =$	L. 0.030	L. 0.044	+ 46.66	L 0.340	L. 2.020	+ 494.11
$\frac{\Delta}{M} =$	0.078	0.066	— 15.38	0.226	0.246	+ 8.84
$\frac{\Delta}{a_i} =$	0.080	0.067	— 16.25	0.217	0.257	+ 18.43

Da essi si rileva, anzitutto, la maggiore variabilità che nelle dieci città considerate presentavano nel luglio 1914 i prezzi della carne rispetto a quella accertata per il pane nello stesso periodo; e poscia che, contrariamente a quanto è accaduto per codesto alimento, la variabilità dei prezzi della carne, anche indipendentemente dalle cause generali di rialzo di prezzi, è notevolmente aumentata durante la guerra.

Tale aumento, che si presenta molto più marcato (del 18.4 %) assumendo come coefficiente di variazione la formula (4^{bis}), anzichè il rapporto tra la differenza media e la media aritmetica (che presenta un aumento dell' 8.8 %), può spiegarsi con un complesso di fattori, tra i quali dovettero esercitare notevole influenza i divieti dei traffici interregionali, ossia l'aumento degli impacci a quel libero gioco della concorrenza che tende al livellamento dei prezzi, ed inoltre l'elevamento delle liste di domanda della popolazione di taluni dei centri considerati, a cagione del più alto grado di benessere conseguito all'accentramento, in essi avveratosi, della produzione e dei traffici di guerra.

6. — Quando molte osservazioni di un fenomeno presentano lo stesso valore, anzichè applicarsi la formula (4^{bis}) alle serie estensive delle osservazioni ripetute, può più speditamente applicarsi una nuova formula semplificatrice alle distribuzioni di frequenze delle osservazioni.

Considerando i valori di una seriazione, graduati in ordine crescente:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3 \dots \; a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

e le corrispondenti frequenze:

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3 \dots \; f_{n-2}, \quad f_{n-1}, \quad f_n,$$

dove m è il numero totale delle frequenze, la somma delle $m - 1$ differenze tra la prima quantità e tutte le altre, ragguagliate alla prima quantità, sarà:

$$f_2\frac{a_2}{a_1}+f_3\frac{a_3}{a_1}+\ldots+f_{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_1}+f_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_1}+f_n\frac{a_n}{a_1}-(m-1)$$

e per tutte le f_1 frequenze di a_1 si avrà:

$$f_1\left[f_2\frac{a_2}{a_1}+f_3\frac{a_3}{a_1}+\ldots+f_{n-2}\frac{a_{n-2}}{a_1}+f_{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_1}+f_n\frac{a_n}{a_1}-m+1\right]$$

Operando ugualmente per le f_2 frequenze di a_2 ecc., si ottiene una tabella analoga a quella costruita al n. 4, dove ogni rapporto viene moltiplicato per la frequenza del valore che compare nel numeratore, ed ogni riga per la frequenza del valore che compare nel denominatore.

Sommando e riducendo si avrà:

$$(4^{ter})\quad \frac{\Delta}{a_i}=\frac{1}{m(m-1)}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_i\frac{A_i}{a_i}\right)-\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{n-i+1}\frac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}}\right)\right],$$

dove A_i è la somma dei termini maggiori di a_i che risultano dai prodotti dei valori per le frequenze corrispondenti, ed A_{n-i} è la somma dei termini non maggiori di a_{n-i}, che risultano dai prodotti medesimi.

7. — Riportiamo, sempre a titolo di esempio, la distribuzione, secondo le ore di lavoro giornaliero, dei fanciulli e delle fanciulle in età compresa tra 12 e 15 anni, impiegati in 13,391 stabilimenti italiani nel 1913 (1):

Ore di lavoro	Numero di fanciulli	Numero di fanciulle
non più di 8	3,090	1,588
8 ½	668	788
9	3,661	2,249
9 ½	1,800	1,791
10	15,199	24,296
10 ½	6,401	27,?89
11	4,985	19,889
11 ½	162	524
12 e più	294	379
Totali	36,260	78,793

(1) *Annuario statistico italiano,* cit., pag. 310.

Si noti che per i fanciulli le ore di lavoro più frequenti sono 10 e per le fanciulle 10 $^1/_2$, il che può spiegarsi riflettendo alla maggiore precocità di sviluppo che, rispetto ai maschi, presentano le femmine, e quindi alla maggior prevalenza di femmine puberi sul totale delle femmine comprese nelle età tra 12 e 15 anni.

Ammettendo per ipotesi che alla prima classe corrisponda una durata media di lavoro di ore 7 $^1/_2$, ed all'ultima classe di ore 12 $^1/_2$, si ottiene anzitutto per la distribuzione dei fanciulli una differenza media di 0,997, e per le fanciulle di 0,651 ossia uguale al 65 $^0/_0$ della prima.

La maggiore variabilità delle ore di lavoro nei fanciulli può spiegarsi con una maggiore variabilità dello sviluppo organico che essi presentino tra 12 e 15 anni, rispetto alle fanciulle della stessa classe di età, sempre in conseguenza del più precoce sviluppo di queste ultime.

Ragguagliando codesti indici alle medie aritmetiche, che sono rispettivamente 9,88 e 10,34, si avrebbero i coefficienti: 0,101 e 0,062, che dimostrerebbero nelle fanciulle una variabilità relativa uguale al 61,38 $^0/_0$ di quella dei fanciulli.

Vediamo, adesso, a quali risultati conduce la formula (4^{ter}).

Considerando dapprima la distribuzione dei fanciulli, si moltiplichino i valori per le freqnenze (colonna 3 della tavola seguente).

a_i	f_i	$a_i \times f_i$	A_i	$f_i \dfrac{A_i}{a_i}$	A_{n-i}	$f_{n-i+1} \dfrac{A_{n-i}}{a_{n-i+1}}$
1	2	3	4	5	6	7
7,5	3,090	23,175	358,475,5	—	23,175	182,128,196
8,5	668	5,678	335,300,5	138,143,804,970	28,853	11.736,755,968
9	3,661	32,949	329,622,5	25,904.426,776	61,802	11,709,851,400
9,5	1,800	17,100	296,673,5	120,680,186,242	78,902	119,923,149,800
10	15,199	151,990	279,573,5	52,971,800,200	230,892	140,756,159,314
10,5	6,401	67,210,5	127,583,5	193,914,161,650	298,102,5	135.094,631,595
11	4,985	54,835	60,373	36,804,527,409	352,937,5	4,971,815,154
11,5	162	1,863	5,538	2,509,718,190	354,800,5	8,344,907,760
12,5	294	3,675	3,675	51,769,530	358,475,5	—
Totali	36,260	358,475,5	1,796,815,0	570,980,394,967	1,787,940,0	432,719,399,187

Procedendo dal basso in alto, si costruiscano classi successive di valori formate rispettivamente con l'ultimo prodotto della colonna 3, con questo e il precedente, e così via (colonna 4).

Ogni classe così ottenuta si ragguagli al valore antecedente, e si moltiplichi per la frequenza che a tale valore corrisponde, ossia: $\frac{3675}{11.5} \times 162 = 51{,}769{,}530$, ecc. (colonna 5).

Procedendo dall'alto in basso, si costruiscano classi successive di valori anologhe alle precedenti (colonna 6); ed ogni classe così ottenuta si ragguagli al valore seguente e si moltiplichi per la frequenza che a tale valore corrisponde (colonna 7).

Sottraendo la somma delle quantità della colonna 7 da quella delle quantità della colonna 5, e dividendo il risultato per $36{,}260 \times 36{,}259 = 1{,}314{,}751{,}340$, si ottiene:

$$\frac{\Delta}{a_i} = 0.105$$

Operando ugualmente sulla distribuzione delle fanciulle, si ottiene:

$$\frac{\Delta}{a_i} = 0.065$$

In ambedue i casi si hanno valori maggiori di quelli dei coefficienti precedenti, e per le fanciulle un coefficiente uguale al 61,9 per cento di quello dei fanciulli.

8. — Nello studio dei metodi per confrontare gl'indici di variabilità suole riguardarsi in modo particolare il caso in cui le serie siano formate da rapporti statistici.

A questo riguardo ed a scanso di equivoci occorre distinguere due scopi diversi, ai quali una misura della variabilità di rapporti può essere rivolta.

Quando, infatti, dalla variabilità della serie dei rapporti in esame interessi di risalire alla variabilità della serie dei numeratori, sarebbe errato fondarsi su medie di scostamenti o di differenze desunte direttamente dai rapporti medesimi, e su coefficienti di variabilità ottenuti ragguagliando tali medie al valor medio dei rapporti od ai valori singoli di essi; ma converrebbe, invece, determinare la relazione in cui codeste misure di variabilità stanno a quelle relative ai singoli elementi dei rapporti, al fine di poter correttamente calcolare i coefficienti di variabilità dei numeratori attraverso quelli dei rapporti.

E' quanto ha fatto il PEARSON, in un caso speciale ed in base a talune ipotesi, per la comparazione della variabilità delle serie di misure antropometriche, le quali appunto si deducono in gran parte da rapporti (1).

Ma quando, invece, una serie di rapporti abbia un significato a sè stante, diverso da quello degli elementi che la compongono, ed interessi di misurare appunto la variabilità delle nuove misure risultanti da quei rapporti, è legittima l'applicazione degli usati procedimenti.

Chi per avventura seguisse un'opinione diversa, dovrebbe ad esempio negare significato razionale alla misura della variabilità di una serie di prezzi generali, per il fatto che essi risultano dalla formula:

$$P = \frac{S}{T},$$

dove S è la somma degli strumenti di scambio disponibili in un dato mercato, moltiplicati per la loro velocità di circolazione, e T è il volume delle transazioni.

Dovrebbe pure negare significato razionale alla misura della variabilità delle serie dei cambî di un paese a su un paese b, per il fatto che il cambio è determinato dalla formula:

$$\text{Cambio di } a \text{ su } b = \frac{Pa\,(\text{eff.}) : Pa\,(\text{oro})}{Pb\,(\text{eff.}) : Pb\,(\text{oro})} + \frac{\text{Debiti di } a \text{ verso } b}{\text{Crediti di } a \text{ verso } b} - 1,$$

dove P sono i prezzi generali effettivi e in oro relativi ai due paesi a e b. (2).

Usando metodi analoghi a quello del PEARSON, quest'ultima formula esporrebbe al caso singolare di far risalire alla variabilità dei rapporti tra i prezzi generali di a effettivi e quelli in oro in quei paesi, o in quel tempo, in cui la bilancia tra

(1) K. PEARSON. *On a Form of Spurious Correlation which may arise when Indices are used in the Measurement of Organs.* Proc. Roy Soc. Vol. LX, 1897; G. U. YULE. *Theory of Statistics,* London 1916, 3ª Ediz., p. 214; GINI, *op. cit.* p. 105 e seg.

(2) Codesta formula è stata illustrata in un nostro articolo: *Brevi osservazioni sui cambi,* in *Supplemento Economico del Giornale: Il Tempo,* Roma, 18 Gennaio 1919.

i debiti e i crediti fosse per caso in equilibrio; e di far risalire alla variabilità dei debiti in quegli altri paesi, o in quell'altro tempo, in cui esistesse una circolazione aurea, o convertibile a vista in oro; mentre tanto l'uno che l'altro fenomeno sono completamente diversi da quello che interesserebbe di considerare, ossia dal cambio.

Lo stesso è a dire, ad esempio, per la fecondità femminile, la quale, pur risultando da un rapporto statistico, ha un significato biologico diverso da quello del numero dei nati, o del numero di femmine atte a procreare; e così via seguitando.

9. — Essendo $a_i - a_i = 0$, la differenza media tra ogni quantità e tutte le quantità di una serie — ossia la cosidetta differenza media con ripetizione — si ottiene sostituendo nell'espressione (1) ad $n\ (n - 1)$ il valore di n^2. Operando ugualmente sul coefficiente (4) e sulle formule semplificatrici (4^{bis}) e (4^{ter}), si ottengono i coefficienti di variabilità della differenza media con ripetizione.

FELICE VINCI

Entomological Statistics

Metron will surely not limit the scope of Statistics to States and human society. Other kinds of communities may claim to be represented in the new organ of advanced statistical science. Indeed the social communities of the lower animal creation have a peculiar interest for the statistician. Their ways are less subject to change than human actions; they better realise the ideal of pure statistics, constancy of the type notwithstanding diversity of the individuals. Subject only to secular evolution, they present the sort of « series », in Dr. VENN's phrase, which is postulated by the theory of probabilities. I have pointed out this character of unprogressive communities in the *Journal of the Royal Statistical Society*; and there and elsewhere (1) I have adduced examples drawn from observations upon bees and wasps. Some recent additional observations in *pari materia* may deserve to be recorded in *Metron*.

The observations were and are directed to a problem which Sir JOHN LUBBOCK had proposed: namely to determine the average duration of an expedition made by bee or wasp, the time which elapses, between the moment when she issues from the hive or nest and the moment when she returns thereto. LUBBOCK attacked the problem directly (2) by marking individual insects. I have employed the logic of statistics to obtain an inferential result. Two methods are available: one dealing with observations made at the beginning or at the end of day, the other appropriate to midday expeditions.

(1) See: *Journal of the Royal Statistical Society*, June 1896, *Statistics of Unprogressive Communities*. — *Ibid*. September, *Supplementary Notes* — *Biometrika*, June 1907, *Observations on Wasps and Bees*.

(2) *Ants, Bees and Wasps*, fifth edition.

To ascertain the duration of an expedition in the early morning you must be on the scene before the first exit occurs; that is, for the sake of observations upon wasps, in this country, about half an hour before sunrise. You note the date (in minutes) of the first exit, and likewise the number that issue in each successive minute; say for half an hour or longer. Likewise you register the number of returns per minute. Say that up to the conclusion of your observations there have occurred n entrances; and let the mean of their dates (in minutes) be t. Let the mean date of the first n exits be t^1. Then $\frac{t - t^1}{n}$ is the measure of the sought average duration. Analogously for the purpose of determining the duration of an evening expedition it is proper to compare the mean date of the last n exits with the mean date of the last n etrances. Observations made in the middle of the day (not carried on from the morning, or continued to the evening) do not afford the convenience of a *terminus a quo* or *terminus ad quem*. They usually present, however, a datum which is wanting at the beginning and at the end of the day's work; namely a steady flow into and out of the nest, as many returning as issuing per minute on an average. With this datum we can determine the average duration, if we have also ascertained the total number that are abroad at the period under consideration. The total number divided by the flow per minute gives the average duration in minutes. It is thus that, given the number of births and deaths per year in a stationary population, and the number of the population, we can infer the mean life-time.

Referring to former publications (1) for fuller explanations of these methods, I now proceed without further preface to adduce a few new observations which may serve as a verification of results obtained before from a much larger range of experience.

For the purpose of applying the first method, I watched a nest of *Vespa germanica* in a field near London, on September 6th. 1919, from 7.16 P. M., « summertime », on till 8 P. M., some minutes after sunset, when the last return occurred. The observations which I made are recorded in columns 2 and 4 (read in connexion with column 3) of Table I. Columns 1 and 5 furnish the apparatus for averaging the entries in columns 2 and 4 respectively. Defining the *date* of an exit or entrance by the number

(1) Those cited in the note above.

of minutes between the initial epoch (7.16) and the time of the event, we find from Table I that the mean date of exit was 13.5 and the corresponding mean date of return 24 in round numbers. Whence for the mean duration of an expedition there is obtained 10.5 minutes. That is the *arithmetic* — more exactly the « weighted » arithmetic — mean of the dates.

It is a nice question whether in a case like the present the arithmetic mean, has an advantage over other averages, in particular the *median*. The median in the case before us is determined by the date at which half the number of observed exits that is 71, had occured; and likewise for the entrances. Whereas 68 had issued at the end of the eleventh minute and 76 at the end of twelfth minute, we may say that the median of exits is 11.375. Likewise the median of entrances occurring after the 13th. minute proves to be $22 + \frac{71 - 61}{16} = 22.625$. Thus we obtain for the mean duration 11.25, much the same figure as before. It should be remarked that the average by which this result is obtained is not the simple median commonly employed, but the *weighted median*, identical with Laplace's *method of situation* (1). Each date does not count simply for one, but for as many as there are observations at that date. The simple median of the exits which terminated at the 40th. minute would have been 20; the simple median of the entrances which extended from the end of the 13th. to the end of the fourty fourth minute would have been 15.5. Whence for the mean date of entrance there would result $13 + 15.5 = 28.5$; and for the mean duration of an expedition 8.5: doubtless a much less accurate result than those which were obtained by the use of *weighted* averages.

Those results may be verified by a process which will serve as a transition to our second method. One of the data required by that method is the number that are outside the nest, engaged in expeditions, at the time of observation. Now a datum of this kind may be derived from the statistics above presented. At the end of thirteen minutes we find (from Table I) that 125 had returned since the initial epoch. Therefore at the initial epoch there were outside 125 *plus* the number of entrances after the thirteenth minute, viz. 142, *minus* the number of the entrances subsequent to the thirteenth minute which are accounted for by

---

(1) *Théorie analitique des Probabilités*. Supplement II.

exits subsequent to the initial epoch, that is just 142. It follows that there were 125 outside at the initial epoch; upon the usual assumption that all who went out returned the same evening. The second datum required by the second method is the *flow*, the number issuing and entering per minute at the time of observation. For this datum we have the observations of the first thirteen minutes. For the mean number of exits per minute during this period we have 81/13 = 6.23; and for the mean number of entrances 125/13=9.6. It is a question whether these figures can properly be combined, as the general rule prescribes, seeing that the traffic is evidently declining with the approach of night. Probably the best available estimate for the flow as relevant to the entrances which occurred during the first thirteen minutes is that which is derived from the entrances alone 9.6. Dividing 125 (the number abroad at the date 10) by 9.6 the estimated flow, we have for the mean duration of an expedition 13, which is as near the figure obtained by the first method, viz. 10.5, as could be expected.

The circumstance that the expeditions tend to be shorter as night approaches must be attended to when comparison is made between sets of observations made in different years. Thus at first sight there appears a discrepancy between the result above given and that wich I obtained under apparently similar circumstances in 1906 (1). The average duration of an evening expedition proved to be 20 minutes in the earlier instance. But that result was based on observations extending over a longer period; the exits which were taken into account beginning 73 minutes before the closing time. Whereas in the experiment now under consideration the corresponding period was only 44 minutes. The earlier record fortunately gives the figure obtained from observations extending over a comparable period, namely 27 minutes before closing (2). The figure for 1906 was 12.2; that for 1919 is 11.5. It is worth recording that the 1906 observations were made under conditions very similar to those of 1919. The species observed was the same, *Vespa germanica*. The date of the day was September 7th. in 1906, September 6th. in 1919. The last entrance occurred at 7.4 P. M. in 1906; in 1919 at 8 P. M. « summertime », corresponding to 7 P. M. in the ordinary reckoning. The two nests were in the same locality, a certain golf-ground in the neighbourhood of London. It

---

(1) *Biometrika*, loc. cit.
(2) *Loc cit.* p. 368.

may be added that approximate figures for the duration of an evening voyage have been found in many other instances recorded in the papers which have been above cited. Altogether the hypothesis of unprogressive statistics seems to be verified.

Such close consilience is not to be expected in the results of the second method to which I proceeded. The duration of an expedition in the day-time has been found to vary from 20 to over 50 minutes — presumably owing to the different character of the tasks on different days. I applied the second method to the nest now under consideration on September 8th. 1919.

The first step was to ascertain the *flow* in and out. Beginning at 10.30 A. M. I made the observations recorded in Table II. The mean number of exits per minute viz. 9.12 proves to be in close agreement with the mean number of entrances viz. 8.85. Accordingly we are justified in assuming a steady flow of about 9 per minute.

The next step is to ascertain the number of those abroad. This is a troublesome and unpleasant task. I once tried poisoning the precincts of the nest. But this does not secure a complete return, only an inferior limit to the required figure. The most effective plan is to knock down with a bit of board or flat implement each and all that return to the precincts of the nest; counting the number of those so exterminated. This is certainly rather a brutal method of taking a census. But the destruction of noxious insects, though directed to a scientific object, will hardly be condemned by the most sturdy antivivisectionist. Having accounted for 400 in the manner described I left the nest in the afternoon; estimating that about fifty remained over, hovering about but not coming within range. I would not have consulted my own convenience by leaving this residue uncounted but that I expected to find them still hanging about on the following morning. But on returning next morning I found that those imprisoned within had burrowed a way out through the solid earth with which I had blocked the gateway, and that business was being carried on as usual. The traffic indeed had not been resumed on the same scale as before; the decrease in the flow bore witness to the loss of population which had been suffered.

Contenting ourselves with the estimate of 50 for the uncounted residue, we have for the number abroad at the period when the flow was determined, 10.30-11 A. M. September 8th., in all 450. That number divided by 9, the observed flow, gives 50 minutes for the duration. That result is in accordance with the most accurate experiment of the sort which I have made; namely in the year 1896, on September 8th., after 10.30 A. M. There was a steady flow of approximately 13.3 per minute; and the number abroad was accurately reckoned to be 740. Accordingly the duration of an expedition was $740/13.3 = 56$. But so long an absence is not always to be expected. In the nearest parallel to the case now presented, namely the nest just now mentioned, observed in 1906, the mean duration of an expedition about 1 P. M. as ascertained by the second method was 35 minutes (1). It was 36 minutes in the case of a nest adjacent to the 1896 case above mentioned (2).

Oxford, All Souls College.

F. Y. EDGEWORTH

---

(1) *Biometrika, loc. cit.*, p. 373.
(2) *Journal of the Royal Statistical Society*, September 1896.

TABLE I.

1 Column 2 × Column 3	2 Number of exits	3 Minutes after 7.26 P. M.	4 Number of entrances	5 Column 4 × Column 3
34	13	1	***5***	
4	2	2	***10***	
18	6	3	***15***	
24	6	4	***9***	
35	7	5	***6***	
42	7	6	***11***	
56	8	7	***13***	
40	5	8	***9***	
18	2	9	***12***	
70	7	10	***6***	
55	5	11	***10***	
96	8	12	***11***	
65	5	13	***8***	
98	7	14	10	140
60	4	15	9	135
48	3	16	7	112
0	0	17	10	170
90	5	18	6	108
76	4	19	4	76
60	3	20	5	100
105	5	21	4	84
66	3	22	6	132
0	0	23	16	368
72	3	24	6	144
175	7	25	5	125
0	0	26	10	260
0	0	27	3	81
112	4	28	2	56
58	2	29	4	116
60	2	30	2	60
124	4	31	6	186
0	0	32	4	128
0	0	33	5	165
34	1	34	4	136
35	1	35	2	70
0	0	36	2	72
74	2	37	2	74
0	0	38	2	76
0	0	39	1	39
40	1	40	2	80
0	0	41	1	41
0	0	42	0	0
0	0	43	1	43
0	0	44	1	44
0	0	45	0	0
1923	142		142	3421

Mean date of exit . . . . 13.5 m.
Mean date of entrance . . 24

Mean duration of expedition 10.5 m.

TABLE II.

1 Minutes after 10,30 A. M.	2 Number of exits	3 Number of entrances
1	9	10
2	14	2
3	13	10
4	14	9
5	8	10
6	13	9
7	8	5
8	6	9
9	5	7
10	11	3
11	7	11
12	6	8
13	9	11
14	2	11
15	1	8
16	10	10
17	13	10
18	9	6
19	11	12
20	5	16
21	6	6
22	11	10
23	11	5
24	9	7
25	8	14
26	6	8
27	11	13
28	13	9
29	9	10
30	10	15
31	9	5
32	10	7
33	14	6
	301	292
	$\frac{1}{2}\left(\frac{301+292}{33}\right)=9$	

La coscrizione militare
dal punto di vista eugenico

1. Il copioso materiale raccolto dagli uffici di statistica e di sanità e dai privati osservatori durante la guerra e quello che verrà raccogliendosi nei prossimi anni di pace permetteranno certamente di approfondire il tema delle relazioni tra la guerra e l'eugenica, trattato, in passato, assai più in base a ragionamenti teorici che a sicuri e precisi dati di fatto.

Indagini parziali finora eseguite hanno fatto già intravvedere che il problema è assai più complesso di quanto molti giudicavano. Previsioni teoriche generalmente accettate come plausibili, quale quella della minore resistenza dei concepiti durante la guerra, non sembrano affatto confermate dalla recente esperienza (1).

Nell'attesa che altri e più estesi dati maturino, atti ad illuminarci sull'influenza che la guerra esercita direttamente, — in quanto, cioè, è guerra guerreggiata — sulle qualità della razza, noi possiamo rivolgere frattanto l'attenzione agli effetti indiretti della guerra, in quanto il timore di essa, o viceversa il suo preordinamento, porta all'istituzione di un esercito permanente.

Avversari e difensori delle guerre hanno variamente valutato, del punto di vista eugenico, gli effetti del servizio militare, soffermandosi in particolare sugli effetti del servizio militare obbligatorio, che, già prima della guerra mondiale, costituiva il metodo generalmente adottato dalle grandi potenze per provvedere alla propria difesa.

Sarebbe certamente ingenuo il pensare che la circostanza che il servizio militare obbligatorio abbia, dal punto di vista eugenico,

---

(1) Cfr. *Sulla mortalità infantile durante la guerra*, in *Atti della Società italiana di Ostetricia e Ginecologia.* Volume XIX. Anno 1919, Roma, Bertero. 1920.

effetti favorevoli o invece sfavorevoli, possa costituire un serio argomento pro o contro le sua conservazione, la quale evidentemente si può giustificare o combattere con argomenti di altro genere e di ben altro peso; ma ciò non scema l'interesse scientifico di un esame imparziale della questione.

In due modi specialmente — sostengono gli avversari della guerra — il servizio militare contribuisce al peggioramento della razza: anzitutto, rendendo difficile, durante la prima giovinezza, il matrimonio e diminuendo così la prolificità della parte della popolazione fisicamente più robusta; in secondo luogo, esponendola al frequente rischio di malattie veneree, che, quando non portano alla sterilità, hanno sulla costituzione dei figli effetti deleteri. Ai quali danni può aggiungersi quello di una mortalità particolarmente elevata, quando i soldati compiano il loro servizio in paesi insalubri, quali generalmente sono le colonie (1).

Per converso, osservano i difensori della guerra che il servizio militare rende indubbiamente il soldato più robusto, e che tale robustezza, almeno in parte, si conserva nella futura vita borghese. Ora è vero bensì che le moderne vedute biologiche portano ad escludere che la robustezza, in quanto sia carattere acquisito, si trasmetta ai figli; ma non si può in ogni modo negare, neppure in base ad esse, che condizioni favorevoli dell'organismo giovino alla salute della prole. Indipendentemente da ciò, in ogni modo, la maggiore robustezza acquisita e più ancora forse la spigliatezza del fare e una certa baldanza che la vita militare imprime e la stessa divisa rendono il militare più attraente per le donne e fanno sì che, pur ritornando borghese, esso abbia una maggiore probabilità di sposarsi e quindi di trasmettere ai figli le sue doti di individuo selezionato (2).

Avversari e difensori delle guerre segnalano certamente, gli uni e gli altri, con le accennate osservazioni, circostanze reali e degne di rilievo.

---

(1) Cfr. J. Novicow. *La critique du darwinisme social.*

Ch. Richet. *Le passé de la guerre et l'avenir de la paix.*

C. W. Saleby. *The long Cost of War*, in *Westminster Gazette.*

Vacher de Lapouge. *Les selections sociales.*

D. Starr Jordan. *War and the Breed.* Boston. The Beacon Press, 1912, pagg. 110-111.

V. D. Kellogg. *Military Selection and Race Deterioration.* Oxford, Clarendon Press. 1916, pagg. 177-178.

Cfr. pure L. Darwin. *Eugenics during and after the War*, in *The Eugenics Review*, July, 1915 pag. 97.

(2) Cfr. L. Darwin. Art. cit., pag. 97.

Tutta la questione sta in ciò: se debbano ritenersi prevalenti, nei loro effetti, le circostanze sfavorevoli messe in luce dagli uni o quelle favorevoli poste in evidenza dagli altri, in modo che, in definitiva, la coscrizione debba riguardarsi, dal punto di vista eugenico, come dannosa o come utile alla nazione.

Si avverta come l'influenza favorevole o sfavorevole della coscrizione dovrebbe, tanto secondo gli avversari quanto secondo i difensori delle guerre, o esercitarsi attraverso una variazione della prolificità, in quanto essa ostacola e ritarda, o viceversa favorisce, i matrimoni di individui selezionati, o almeno avere una ripercussione sulla prolificità, in quanto le malattie veneree, che durante la ferma facilmente si contraggono, hanno per effetto la perdita o la riduzione del potere di generare.

Ora l'ordinamento della coscrizione in Italia è tale da permettere di ricercare se, in tempo di pace, la coscrizione è circostanza che tende in definitiva ad innalzare o ad abbassare la prolificità di chi vi è soggetto; e dati numerosi, pazientemente messi insieme da varie fonti durante parecchi anni, mi consentono, se non m'inganno, di dare — per quanto almeno si riferisce alla mia patria — una risposta alla interessante questione.

2. I cittadini italiani giudicati idonei alle armi vengono arruolati in tre categorie.

In tempo di pace, gli arruolati in terza categoria non prestano servizio militare.

Gli arruolati in prima categoria prestano anzitutto servizio militare durante un periodo continuativo, detto *ferma*. La durata di questa è venuta notevolmente riducendosi attraverso il tempo. Di 5 anni per la cavalleria e di 3 anni per le altre armi anteriormente al 1882, essa è stata ridotta a 4 anni nel 1882 e successivamente a 3 anni nel 1895 per la cavalleria e infine nel 1910 a 2 anni per tutte le armi. Oltre al periodo della ferma ed all'infuori di evenienze straordinarie, i militari di prima categoria anteriormente alla guerra venivano di regola richiamati sotto le armi, a turno di classe, a scopo di esercitazione, per brevi periodi non superiori ad un mese.

Gli arruolati in seconda categoria non sono soggetti alla ferma, ma prima della guerra venivano chiamati alle armi, a fine di istruzione, una o più volte, per un periodo di tempo non superiore in complesso a sei mesi.

Il reclutamento italiano ci pone così di fronte a tre categorie di cittadini, tutti ugualmente atti alle armi, delle quali una prima compie un lungo servizio militare, un'altra un servizio militare breve e spesso frazionato, una terza infine non compie servizio militare alcuno.

Differiscono queste tre categorie — dobbiamo noi domandarci — nei rispetti della prolificità? e, in caso affermativo, in che senso?

3. Prima di eseguire questa indagine, noi dobbiamo però vedere se l'assegnazione degli arruolati alle tre categorie non si compia in base a criteri che sono in relazione con la prolificità, poichè, in caso affermativo, potremmo restare in dubbio se le differenze riscontrate fra la prolificità delle diverse categorie dipendano veramente dallo avere o meno prestato servizio militare o non invece dai criteri in base a cui la assegnazione viene fatta.

Fino al 1908 (classe di leva 1887 compresa) l'assegnazione alla prima o alla seconda categoria aveva luogo a sorte, mentre l'assegnazione alla terza categoria era determinata dalle condizioni di famiglia dell'arruolato.

Dette condizioni di famiglia si possono distinguere in quattro gruppi.

Gruppo A.

1. - Figlio unico di padre vivente.

2. - Figlio unico di madre tuttora vedova.

3. - Nipote unico di avolo che non abbia figli maschi.

4. - Nipote unico di avola tuttora vedova che non abbia figli maschi.

5. - Fratello unico di sorelle nubili orfane di padre e di madre.

Per «unico» si intende, in tutti questi casi, «unico maschio», per modo che codesti figli o nipoti o fratelli unici possono avere un numero anche grande di sorelle.

Poichè però le figliuolanze italiane hanno in media 4-5 figli e devono quindi in media contenere più di due figli maschi, le figliuolanze con un solo maschio devono avere un numero medio di figli molto al disotto della media che si riscontra per l'insieme di tutte le figliuolanze. E' d'altra parte stabilito che vi è, rispetto alla prolificità, una notevole rassomiglianza tra figli e genitori, per modo che, indipendentemente da ogni influenza del servizio militare, sarebbe da attendersi che gli arruolati iscritti alla terza categoria appartenenti a questo gruppo presentassero, a pari età, un numero medio di figli inferiore a quello degli arruolati in 1ª e 2ª categoria.

Gruppo B.

1. - Figlio primogenito di padre che non abbia altro figlio maggiore di 12 anni.

2. - Figlio primogenito di padre entrato nel 70° anno di età.

3. - Figlio primogenito di madre tuttora vedova.

Pare verosimile che anche questi arruolati appartengano a famiglie poco prolifiche.

I padri entrati nel 70° anno di età quando il figlio era di leva non hanno infatti cominciato ad avere figli, o almeno figli maschi, che a 50 anni, e si comprende come essi, in generale, non debbano avere avuto prole numerosa, sia perchè, dopo i 50 anni, declina anche nell'uomo l'attitudine a generare, sia perchè, data la relazione che intercede fra l'età dei due sposi, tali genitori dovevano per lo più essere accoppiati a mogli di un'età in cui la fecondità della donna è molto ridotta.

I primogeniti, che all'età della leva non hanno fratelli superiori a 12 anni, devono spesso appartenere a famiglie in cui l'intervallo fra le nascite è molto lungo, e basso quindi il numero dei figli.

Tra le madri rimaste vedove e non ancora passate a seconde nozze quando il primogenito era di leva, sono comprese tutte quelle per cui la morte del marito ha interrotto il corso della prolificazione, circostanza che deve naturalmente far risultare bassa la media dei figli della intera categoria.

Gruppo C.

1. - Nipote primogenito di avolo entrato nel 70° anno di età e che *non* abbia figli *maschi*.

2. - Nipote primogenito di avola tuttora vedova e che non abbia figli maschi.

3. - Primogenito di orfani di padre e madre.

4. - Maggior nato di orfani di padre e madre se il primogenito suo fratello consanguineo sia affetto da talune gravi infermità o difetti fisici o condannato a pene criminali di lunga durata.

5. - Ultimo nato di orfani di padre e madre, quando i fratelli e le sorelle maggiori si trovino nelle condizioni di cui al numero precedente.

E' difficile dire se le figliuolanze a cui appartengono questi arruolati sono da ritenersi più o meno numerose della media, per quanto la prima alternativa sembri più verosimile.

La circostanza che si tratta sempre di arruolati aventi fratelli o sorelle e che sono quindi, in ogni caso, esclusi i figli unici farebbe pensare che le figliuolanze a cui essi appartengono dovessero essere più numerose della media. Un'altra ragione per fare la medesima previsione, per quanto riguarda gli arruolati di cui ai numeri 1 e 2, è che, se a 20 anni essi hanno ancora gli avoli viventi, ciò fa pensare che questi, o i genitori, o gli uni e gli altri, si sieno spesso sposati ad un'età non avanzata e debbano quindi in generale avere figliuolanze numerose.

Gruppo D.

1. - Inscritto in una stessa lista di leva con un fratello nato nello stesso anno, quando il fratello sia tenuto al servizio militare.

2. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo inscritto alla prima categoria, il quale presti servizio militare in tempo di pace.

3. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo in ritiro per ferite o infermità dipendenti da servizio.

4. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo morto mentre era sotto le armi, o mentre era in riforma per ferite ricevute o infermità dipendenti da servizio, o mentre era in congedo illimitato purchè la morte sia avvenuta in conseguenza di ferite o di infermità dipendenti da servizio.

Tutte queste categorie di arruolati hanno maggiore probabilità di appartenere a figliuolanze numerose, sia (per i numeri 2, 3 e 4) perchè maggiore è il numero dei fratelli e maggiore è la probabilità di averne uno che presta o ha prestato servizio militare; sia perchè (per il numero 1) il fatto che due fratelli sieno nati nello stesso anno e appartengano quindi alla stessa classe di leva fa pensare che nella figliuolanza le nascite si succedano a brevi intervalli, circostanza che di regola si accompagna ad un'alta prolificità.

Dei quattro gruppi (A, B, C, D) in cui si possono classificare, ai fini che ci interessano, gli arruolati in 3ª categoria fino al 1908, si può dunque ritenere che quelli del gruppo A e, in minore misura, quelli del gruppo B appartengano a famiglie poco prolifiche, mentre quelli del gruppo C, e soprattutto quelli del gruppo D, a famiglie molto prolifiche. La tavola Iª mostra la frequenza con cui gli arruolati delle classi di leva 1878-1887 si sono ripartiti fra i quattro gruppi.

Come si vede, la percentuale dei gruppi subprolifici A e B non è molto superiore a quella dei gruppi superprolifici C e D. Il gruppo D, d'altra parte, che deve ritenersi più fortemente superprolifico, è più numeroso del gruppo A, che deve ritenersi più fortemente subprolifico. Queste cifre non potrebbero dire se, in definitiva, fra le classi di leva anteriori al 1888, gli inscritti in 3ª categoria devono ritenersi appartenenti a famiglie più o meno prolifiche di quelli inscritti in 1ª e in 2ª categoria.

Altri indizi fanno però ritenere che essi appartengano a famiglie più prolifiche. La percentuale degli analfabeti risulta infatti, TAVOLA Iª.

Inscritti di leva assegnati alla 3ª categoria secondo la causa dell' assegnazione (Classi di leva 1878-1887)

Gruppi	Numero degli arruolati in terza categoria		Percentuali	
A.	335,958	540845	*36.2*	*58.3*
B	204,887		*22.1*	
C	17,442	385740	*1.9*	*41.7*
D	368,298		*39.8*	
Totale	926,585		*100.0*	

fra gli inscritti in 2ª e 3ª, superiore che fra gli inscritti in 1ª categoria (Cfr. Tavola IIª), ed è noto come l'analfabetismo sia in istretta correlazione con l'appartenenza alle classi sociali più basse e con una più alta prolificità.

Un'altra indagine, che sembra poter gettare qualche luce sulla prolificità delle famiglie delle varie categorie di arruolati, è quella del modo con cui queste si reclutano dai vari gruppi professionali.

I risultati di tale indagine sono contenuti nella tavola IIIª.

A prima vista, essi parrebbero difficilmente conciliabili con quelli della tavola precedente. Dalla tavola IIIª infatti appare che i gruppi professionali più istruiti (esercenti professioni libere e studenti, proprietari, impiegati, commercianti) danno alla Iª categoria una percentuale più bassa della media; mentre dalla tavola precedente appariva che la 1ª categoria contiene una percentuale di persone che sanno leggere e scrivere superiore alla media. L'apparente contraddizione si spiega col peso sproporzionato che, di fronte a tutti gli altri gruppi professionali, ha il gruppo degli «agricoltori e simili». Questo contiene circa la metà degli arruolati; esso dà, d'altra parte, alla 1ª categoria una percentuale di arruolati (49,4 %) inferiore alla media, mentre presenta una frequenza particolarmente elevata di analfabeti (41,4 % nelle classi di leva 1884-1886, contro una media generale, per tutti i gruppi professionali, del 31,1 %). E' anche notorio che la classe degli agricoltori si distingue per una forte prolificità. Per modo che, in definitiva, anche l'esame del modo con cui le varie categorie di arruolati si reclutano dai diversi gruppi

TAVOLA IIª.

Analfabetismo degli inscritti di leva secondo la categoria
(Classi di leva 1878-1888)

Categoria degli inscritti	Numero degli inscritti secondo l'analfabetismo				Percentuale degli analfabeti $\left(\frac{100\ a}{d}\right)$
	sanno leggere e scrivere (a)	sanno solo leggere (b)	non sanno leggere nè scriv. (c)	Totale (d)	
1ª	659,789	13,080	305,891	978,760	*31.2*
2ª e 3ª	619,328	14,636	304,997	938,961	*32.4*

professionali pare confermare la conclusione che gli arruolati in 1ª categoria delle classi di leva anteriori al 1888 dovevano tendere ad essere piuttosto più che meno prolifici di quelli arruolati in 2ª e 3ª categoria.

La legge del 1907, che cominciò ad applicarsi con la classe di leva del 1908, modificò radicalmente i criteri di assegnazione alle varie categorie, da una parte prescrivendo che l'assegnazione alla 2ª categoria dovesse farsi, non più a sorte, ma in considerazione delle condizioni di famiglia, e assegnando alla 2ª categoria parte degli arruolati che, a norma delle precedenti disposizioni, sarebbero stati attribuiti alla 3ª categoria; dall'altra, non considerando più titolo per essere esonerato dal servizio di 1ª categoria l'avere un fratello nato nello stesso anno e inscritto nella stessa lista di leva oppure in servizio militare (1).

Classificando gli arruolati in 2ª e 3ª categoria in 4 gruppi corrispondenti a quelli che abbiamo preso in considerazione per gli arruolati in 3ª categoria antecedentemente al 1908, si ottiene la ripartizione seguente.

Categoria 2ª — Gruppo A.

1. - Figlio unico di padre vivente che non sia entrato nel 65° anno di eta.

2. - Nipote unico di avo che non sia entrato nel 70° anno di età e che non abbia figli maschi.

(1) Altre minori variazioni si possono desumere dal confronto fra i titoli di assegnazione alla 3ª categoria prima del 1908 esposti nelle pagine precedenti e quelli di assegnazione alla 2ª e 3ª categoria passati in rassegna più sotto.

TAVOLA IIIª.

Frequenza dell'assegnazione alla 1ª o alla 2ª e 3ª categoria secondo la professione (Classi di leva 1878-1887).

Gruppi professionali	Su 100 arruolati furono assegnati alle categorie 1ª	2ª e 3ª
Cavallari	58.8	41.2
Uomini di fatica non addetti a lavori fissi	58.6	41.4
Sellai e morsai	56.5	43.5
Maniscalchi	54.2	45.8
Marinai e pescatori	53.8	46.2
Pastori ed allevatori di bestiame	53.5	46.5
Armaioli e pirotecnici	52.8	47.2
Muratori, minatori e simili	52.4	47.6
Calzolai e lavoratori in pelli	51.0	49.0
Medici e farmacisti	50.9	49.1
Servitori in genere	50.3	49.7
Operai in metallo	50.3	49.7
Operai in legno	50.3	49.7
Esercenti belle arti	50.2	49.8
Agricoltori e simili	49.4	50 6
Artigiani diversi	48.9	51.1
Impiegati in genere	48.7	51.3
Professioni girovaghe	48.0	52.0
Commercianti in genere	47.7	52.3
Esercenti professioni libere e studenti	45.9	54.1
Proprietari	45.4	54.6
Artefici in metalli preziosi	44.5	55.5
Addetti alla preparazione e allo spaccio dei commestibili	42.0	58.0
Complessivamente	50.0	50.0

Gruppo B.

1. - Figlio primogenito di padre che non sia entrato nel 65° anno di età e che non abbia altro figlio maggiore di dodici anni.

Gruppo D.

1. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo sotto le armi.

2. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo caporale o soldato di cavalleria o artiglieria a cavallo che dopo la ferma presti spontaneamente servizio in dette armi con l'obbligo minimo di un anno (1).

3. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo sottufficiale ma di tre anni (2).

4. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo in ritiro per ferite o infermità dipendenti da servizio.

5. - Inscritto che abbia un fratello consanguineo morto mentre era sotto le armi, o mentre era in riforma per ferite ricevute o infermità in dipendenza da servizio, o mentre era in congedo illimitato purchè la morte sia avvenuta in conseguenza di ferite od infermità dipendenti da servizio.

Categoria 3ª — Gruppo A.

1. - Figlio unico di padre che sia entrato nel 65° anno di età o sia affetto da infermità permanenti ed insanabili, imperfezioni o difetti fisici che lo rendano inabile a lavoro proficuo.

2. - Figlio unico di madre tuttora vedova.

3. - Nipote unico di avolo che sia entrato nel 70° anno di età e che non abbia figli maschi.

4. - Nipote unico di avola tuttora vedova e che non abbia figli maschi.

5. - Fratello unico di sorelle orfane di padre e di madre nubili o vedove senza figli maggiori di 12 anni.

Gruppo B.

1. - Figlio primogenito di padre che sia entrato nel 65° anno di età o sia affetto da infermità permanenti ed insanabili, imperfezioni o difetti fisici che lo rendano inabile a lavoro prficuo.

2. - Figlio primogenito di madre tuttora vedova.

Gruppo C.

1. - Nipote primogenito di avolo che sia entrato nel 70° anno di età e che non abbia figli maschi.

2. - Nipote primogenito di avola tuttora vedova e che non abbia figli maschi.

---

(1) Legge 30 Giugno 1910.
(2) Legge 6 Luglio 1911.

3. - Primogenito di orfani di padre e di madre.

4. - Ultimo nato di orfani di padre e di madre, che abbia almeno un fratello inabile a lavoro proficuo e gli altri dichiarati definitivamente assenti o detenuti con lunghe pene da scontare.

Gruppo D.

1. - Inscritto (1) che abbia un fratello consanguineo vincolato alla ferma di 6 anni nel corpo reali equipaggi.

Il numero degli arruolati nei rispettivi gruppi delle due categorie di classi di leva 1888-1892 si può calcolare essere stato il seguente (2):

TAVOLA IVª.

Inscritti di leva assegnati alla 2ª e 3ª categoria secondo la causa dell' assegnazione (Classi di leva 1888-1892).

Gruppi	Categoria 2ª			Categoria 3ª			Totale categorie 2ª e 3ª		
	Numero degli arruolati	Percentuali		Numero degli arruolati	Percentuali		Numero degli inscritti	Percentuali	
A	105,275	*62.0*	*96.6*	51,815	*45.5*	*92.0*	157,090	*55.3*	*94.8*
B	58,746	*34.6*		52,876	*46.5*		111,622	*39.5*	
C	—	*0.0*	*3.4*	8,926	*7.9*	*8.0*	8,926	*3.2*	*5.2*
D	5,679	*3.4*		140	*0.1*		5,819	*2.0*	
Totale	169,700	*100.00*		113.757	*100.00*		283,457	*100.00*	

Come si vede, la ripartizione degli inscritti tra i vari gruppi risulta, per le classi posteriori al 1887, essenzialmente diversa che per le precedenti (Cfr. Tavola Iª). Questi dati fanno ritenere che, a partire dal 1908, gli inscritti in 2ª o 3ª categoria appartenessero a famiglie meno prolifiche degli inscritti in 1ª categoria. E tale previsione viene confermata dall'esame dei dati relativi all'analfabetismo degli

(1) Legge 18 Luglio 1911.

(2) Le statistiche danno cumulativamente le cifre degli arruolati in 3ª categoria per i numeri 1 del gruppo A e B, per i numeri 2 dei gruppi A e B, per il numero 3 del gruppo A e il numero 1 del gruppo C, per il numero 4 del gruppo A e il numero 2 del gruppo C. Tali cifre furono ripartite fondandosi sulle cifre più dettagliate relative alle classi di leva antecedenti e tenendo conto degli arruolati inscritti in 2ª anzi che in 3ª categoria in base alla nuova legge.

inscritti nelle differenti categorie e al modo con cui queste categorie si reclutano dai vari gruppi professionali. Tali dati si trovano esposti nelle tavole V^a e VI^a.

La tavola V^a mostra come l'analfabetismo, che si associa generalmente ad un'alta prolificità, sia più frequente nella 1^a che nella 2^a e 3^a categoria, contrariamente a quanto avveniva per le classi anteriori al 1888. Dalla tavola VI^a si rileva come la gran parte dei gruppi professionali appartenenti alle classi basse (e tra gli altri quello numerosissimo degli agricoltori, caratterizzato da una prolificità particolarmente elevata) contribuiscano alla 1^a categoria in misura superiore che alla 2^a e 3^a categoria.

TAVOLA V^a.

Analfabetismo degli inscritti di leva secondo la categoria
(Classi di leva 1888-1892).

Categoria degli inscritti	Numero degli inscritti secondo l'analfabetismo				Percentuale degli analfabeti $\left(\frac{100\ c}{d}\right)$
	sanno leggere e scrivere (a)	sanno solo leggere (b)	non sanno leggere nè scriv. (c)	Totale (d)	
1^a	518,337	7162	231,841	757,940	*30.5*
2^a	120,757	1688	47,696	170,141	*28.0*
3^a	92,952	1241	37,522	131,715	*28.4*

L'esame critico dei dati relativi alla composizione delle varie categorie di arruolati ci porta dunque alla conclusione che queste non possono considerarsi identiche per quanto concerne la tendenza a riprodursi che mostrerebbero indipendentemente dalla influenza dell'avere o meno prestato servizio militare. Per le classi di leva più anziane (anteriori al 1888), pare probabile che gli inscritti alla 1^a ed alla 2^a categoria appartenessero a famiglie alquanto meno prolifiche e tendessero quindi, per questa circostanza, ad essere in una certa misura meno prolifici essi stessi degli inscritti in 3^a categoria, e pare quindi anche probabile che gli inscritti in 1^a categoria appartenessero a famiglie alquanto meno prolifiche e tendessero quindi essi stessi ad essere meno prolifici del complesso degli inscritti in 2^a e 3^a categoria. Per le classi di leva posteriori (1888 e seguenti), è il contrario invece che deve ritenersi.

Infirma questo risultato le conclusioni, a cui noi saremo per addivenire, circa l'influenza dell'avere prestato servizio militare sopra la riproduttività delle persone atte alle armi?

TAVOLA VIª.

Frequenza dell' assegnazione alla 1ª, alla 2ª e alla 3ª categoria secondo la professione (Classi di leva 1888-1892).

Gruppi professionali	Su cento arruolati furono assegnati alle categorie		
	1ª	2ª	3ª
Cavallari	76.0	14.1	9.9
Professioni girovaghi	74.5	13.1	11.6
Marinai e pescatori	73.2	15.1	11.7
Muratori, minatori e simili	73.1	15.1	11.8
Agricoltori e simili	72.8	15.5	11.7
Pastori ed allevatori di bestiame	72.2	15.8	12.0
Sellai e morsai	72.2	15.1	12.7
Servitori in genere	72.1	14.9	13.0
Addetti alla preparazione ed allo spaccio dei commestibili	71.3	15.8	12.9
Uomini di fatica non addetti a lavori fissi	70.8	16.2	13.0
Operai in metallo	69.0	17.3	13.7
Operai in legno	68.8	17.6	13.6
Maniscalchi	68.7	16.3	15.0
Esercenti belle arti	68.3	17.7	14.0
Calzolai e operai in pelli	68.2	18.0	13.8
Commercianti in genere	67.6	18.8	13.6
Artefici in metalli preziosi	64.3	19.1	16.6
Proprietari	64.2	20.1	15.7
Impiegati in genere	63.1	19.9	17.0
Esercenti professioni libere e studenti	63.1	20.1	16.8
Armaioli e pirotecnici	62.2	21.9	15.9
Complessivamente	71.8	15.5	12.7

In nessun modo. Non che infirmarle, anzi, le corrobora.

Dalle indagini che verremo esponendo risulta infatti che, nelle età più giovani, gli inscritti in 1ª categoria hanno un numero medio di figli inferiore agli inscritti in 2ª ed in 3ª, ma che la differenza in seguito si attenua, fino a dar luogo in definitiva ad una prolificità superiore da parte degli inscritti di 1ª categoria.

In base alle considerazioni sopra esposte, noi avremmo invece dovuto attenderci, qualora l'avere prestato o meno la ferma militare non avesse esercitato alcuna influenza sulla riproduttività degli idonei alle armi, che le classi posteriori al 1887 avessero dovuto mostrare una prolificità superiore tra gli inscritti in 1ª categoria e le classi anteriori al contrario una prolificità inferiore.

E' pertanto autorizzata la conclusione che, se le varie categorie fossero state tutte perfettamente omogenee rispetto alla tendenza riproduttiva, le differenze riscontrate in connessione con l'avere o meno compiuta la ferma militare, sarebbero risultate, non già minori, ma anzi maggiormente accentuate.

4. Sarà opportuno ricordare anche che le assegnazioni alla 2ª e alla 3ª categoria non sono immutabili. In tempo di pace, infatti, qualora si riproducano nello stato della famiglia dell'inscritto in 1ª categoria modificazioni tali per cui avrebbe avuto diritto, se avesse concorso alla leva, ad essere assegnato alla 2ª o alla 3ª categoria, può l'inscritto in 1ª categoria, facendo domanda in tempo utile, ottenere il passaggio alla categoria corrispondente.

Codeste modificazioni possono intervenire nell'intervallo fra le visite al consiglio di leva e l'arruolamento: l'arruolato viene allora definitivamente assegnato alla categoria che gli spetta secondo le condizioni di famiglia sopravvenute e in base ad essa esercita i suoi doveri militari.

Ma può anche darsi che le modificazioni sopravvengano dopo che il militare ha già compiuto la ferma: allora il passaggio di categoria non gli serve che per i successivi richiami: noi potremo in tal caso trovare nelle nostre ricerche un militare inscritto in 2ª e 3ª categoria che in realtà ha compiuto invece la sua ferma come arruolato in 1ª categoria. Questa rappresenta evidentemente una circostanza perturbatrice nelle nostre indagini.

Trattasi però di una circostanza di carattere eccezionale. Essa non può avere, d'altra parte, altro effetto che quello di rendere meno netta la distinzione tra le categorie e di fare apparire quindi attenuata, in confronto alla realtà, l'influenza che l'assegnazione all'una piuttosto che all'altra di esse esercita sulla riproduttività dei coscritti idonei alle armi.

5. Sgombrato così il terreno dai dubbi preliminari, passiamo ad esaminare i dati di cui disponiamo circa lo stato civile e il numero dei figli dei militari, distinti secondo la categoria a cui appartengono.

Un primo gruppo di dati si riferisce al distretto militare di Ancona ed è ricavato da un allegato al *Disegno di Legge* portante *Modificazioni al Testo Unico delle leggi sul reclutamento del Regio Esercito approvato con R. D. 6 agosto 1888,* presentato dal Ministero della Guerra nella seduta del 19 febbraio 1903 (1).

I dati si riferiscono ai militari bisognosi del distretto di Ancona soggetti a richiamo sotto le armi, in età quindi da 23 a 40 anni e appartenenti alla 1ª e 2ª categoria.

Codesti dati erano stati appositamente raccolti, in occasione di un precedente disegno di legge presentato nel 1888 dall'on. Di San Marzano, allo scopo di misurare la portata finanziaria della proposta di concedere soccorsi alle famiglie bisognose dei militari richiamati alle armi.

Delle tavole seguenti, la VIIª contiene i dati assoluti, quali furono ottenuti da un conveniente raggruppamento dei dati esposti nell'allegato. Essi mostrano come la rilevazione sia sufficientemente estesa per che le sue conclusioni debbano venire accolte con fiducia. La tavola VIIIª contiene i dati percentuali che a noi particolarmente interessano.

Il loro andamento è invero molto suggestivo.

Confrontiamo anzitutto le colonne 2 e 3 della tavola VIIIª. I militari di 1ª categoria presentano nelle classi di età di 23-25 anni una percentuale di ammogliati (47.4) notevolmente inferiore a quella dei coetanei di 2ª categoria (58.3); la differenza si è già di molto attenuata nella classe di 26-28 anni; nella classe successiva essa si inverte e la differenza si accentua in quella di 32-39 anni, la più avanzata a cui si riferiscono i nostri dati.

Questi dati mostrano dunque come l'obbligo della ferma, a cui sono sottoposti gl'inscritti in 1ª a differenza di quelli inscritti in 2ª categoria, abbia per effetto di ritardare il matrimonio per un

(1) *Atti Parlamentari: Camera dei Deputati,* Legislatura XXI, 2ª Sessione, 1902. Documenti, disegni di legge e relazioni, n. 300.

TAVOLA VII^a.

Numero dei militari bisognosi del distretto di Ancona soggetti a richiamo sotto le armi, delle loro mogli e dei loro figli viventi.

Età in anni	Militari reputati bisognosi		Numero delle loro mogli		Numero dei loro figli viventi	
	Categoria 1ª	Categoria 2ª	Categoria 1ª	Categoria 2ª	Categoria 1ª	Categoria 2ª
1	2	3	4	5	6	7
23-25	435	84	206	49	196	59
26 28	595	244	460	194	495	287
29-31	670	260	603	232	962	412
32-34	521 } 1439	510 } 1161	492 } 1357	464 } 1074	1024	1043
35-39	918 }	651 }	865 }	610 }	2215	1564
Complessivamente	3139	1749	2626	1549	4892	3365

TAVOLA VIII^a.

Stato civile e prolificità dei militari bisognosi del distretto di Ancona.

Età in anni	Mogli per cento militari		Figli viventi per cento militari ammogliati		Figli viventi per cento militari	
	Categoria 1ª	Categoria 2ª	Categoria 1ª	Categoria 2ª	Categoria 1ª	Categoria 2ª
1	2	3	4	5	6	7
23-25	47.4	58.3	95	120	45	70
26-28	77.3	79.5	108	148	83	118
29-31	90.0	89.2	160	178	144	158
32-34	94.4 } 94.3	91.0 } 92.5	203	225	197	205
35-39	94.2 }	93.7 }	256	256	241	240
Complessivamente	83.7	88.6	186	217	156	192

numero notevole di essi. In definitiva però — e già verso i 30 anni — la percentuale degli ammogliati risulta, non più bassa, ma più alta per coloro che hanno compiuto la ferma militare.

Contratti più tardi, è naturale che i matrimoni degli inscritti in 1ª categoria sieno meno prolifici, finchè si considerano coppie giovani che non hanno esaurito la prolificazione. E' quanto mettono in luce i dati delle colonne 4 e 5 per le classi di età di 23-25, 26-28, 29-31 e 32-34 anni (1). Già nella classe di 35-39 anni, però, il numero medio di figli è uguale per gli ammogliati delle due categorie. Si avverta come a questa età la prolificazione delle coppie non sia certo esaurita. Ciò si intende anche dalla media dei figli viventi (2.56) molto più bassa di quella (almeno 4) che può ammettersi per la classe di popolazione bisognosa.

Dobbiamo noi ritenere che l'aumento nel numero dei figli col crescere dell'età continui anche dai 40 anni in su, come avviene per le età più basse, ad essere più rapido per gli inscritti in 1ª categoria, in modo che essi finiscano per avere un numero medio di figli per matrimonio superiore a quello degli inscritti in 2ª categoria?

I dati della tavola VIIIª non permettono di rispondere con sicurezza a questa domanda, per quanto la circostanza che nella classe di 35-39 anni i matrimoni sono più recenti per gli inscritti in 1ª categoria che per gli inscritti in 2ª categoria debba far riguardare come plausibile una risposta affermativa. Altri dati ci potranno dare la conferma di questa previsione (cfr. pag. 102 e tavola XIIª).

Fin da ora possiamo intanto affermare che, anche se, in media, la prolificità definitiva degli sposi di 1ª categoria rimanesse uguale a quella degli sposi di 2ª categoria, la prolificità definitiva di tutti gli inscritti in 1ª categoria dovrebbe risultare, in media, alquanto superiore a quella di tutti gli inscritti in 2ª categoria, perchè, come si è visto, tra quelli la percentuale dei coniugati risulta alquanto più elevata che tra questi. Ciò è messo in luce dai dati delle colonne 6 e 7, i quali mostrano che, già a 35-39 anni, il numero dei figli viventi per 100 militari è, per gli inscritti in 1ª (241), lievemente superiore che per gli inscritti in 2ª categoria (240).

---

(1) Si avverta come i dati di queste colonne, che indicano i quozienti dei figli per i militari ammogliati delle varie classi di età, dieno una misura approssimata per eccesso della prolificità dei matrimoni, in quanto una parte dei figli deriva da matrimoni, in cui la moglie è morta. Il numero dei figli dovrebbe dunque a rigore dividersi per il numero di militari ammogliati o vedovi; ma il numero dei militari vedovi non è noto. L'errore che si commette è, d'altra parte, trascurabile. Su oltre 100 000 militari morti, il numero dei vedovi stava a quello dei coniugati come neppure 2 a 100.

I coscritti idonei alle armi che hanno prestato la ferma militare, per quanto si sposino in media più tardi, finiscono dunque coll'avere un numero medio di figli per matrimonio non inferiore e probabilmente superiore ai coscritti, pure idonei alle armi, che dalla ferma vanno esenti e, poichè, d'altra parte, più di rado essi restano celibi, finiscono con l'avere una media di figli per militare più elevata.

Potrà parere strano che i matrimoni degli inscritti in 1ª categoria, per quanto contratti più tardi, finiscano con l'essere non meno, e forse più, prolifici di quelli, più precoci, degli inscritti in 2ª categoria, mentre è notorio che, nella popolazione generale, a matrimoni più tardivi corrisponde un numero di figli più basso. Il fenomeno può spiegarsi, anche a prescindere dall'ipotesi, che non sembra molto verosimile, che la vita attiva condotta durante la ferma militare accresca in modo permanente il potere riproduttivo. La causa della minore prolificità dei matrimoni tardivi nella popolazione generale deve infatti farsi risalire, non ad un abbassamento della fertilità del maschio, la quale, entro larghi limiti, non varia sensibilmente con l'età, ma all'abbassamento della fertilità della donna, la cui età è, nella popolazione generale, fortemente correlata con quella del marito. Ora la maggiore percentuale di ammogliati che gli inscritti in 1ª categoria finiscono per avere, mostra chiaramente che essi sono preferiti, dal sesso gentile, agli inscritti in 2ª categoria e ciò fa pensare che, sebbene alquanto più avanzati in età all'atto del matrimonio, essi riescano ad impalmare donne altrettanto o più giovani di quelle sposate dagli inscritti in 2ª categoria, o donne più sane e più robuste e quindi in definitiva più feconde.

Conviene però tener presente che, per giudicare esattamente della produttività di una popolazione, non basta tener conto della quota definitiva dei coniugati e della prolificità definitiva dei matrimoni. La morte spesso colpisce persone che, ancora celibi, si sarebbero sicuramente sposate, e spesso ancora tronca le unioni prima che abbiano dato il numero dei figli di cui erano capaci. Quando muoiono prima dei 35 anni, gli inscritti in 1ª categoria lasciano meno figli di quelli di 2ª categoria. E' questa una circostanza che conviene tenere presente.

E' dubbio però se essa valga a compensare la maggiore prolificità definitiva degli inscritti in 1ª categoria. Della sua portata ci possiamo approssimativamente render conto ammettendo che la mortalità al di sotto e al di sopra di 35 anni sia, per gli inscritti in 1ª e per quelli in 2ª categoria, conforme a quella indicata dalla tavola di mortalità per la popolazione italiana maschile costruita in base ai dati dei censimenti del 1901 e 1911 e alle morti del decennio 1901-910.

Detta tavola dimostra che, su 100 mila nati, 1389 muoiono da 23 a 26, 1312 da 26 a 29, 1284 da 29 a 32, 1291 da 32 a 35 anni, 61,962 oltre 35 anni. D'altra parte, la precedente tavola VIII^a ci dice che gli inscritti in 1^a categoria di 23-25 anni hanno in media 0.25 nati meno degli inscritti in 2^a categoria, e che, per i gruppi seguenti di 26-28, 29-32, 32-34 anni, le differenze sono rispettivamente di 0.35, 0.14, 0.08. Ammettendo che le differenze sieno, per i morti, uguali che per i viventi della stessa categoria di età, 1389 × 0.25 + 1312 × 0.35 + 1284 × 0.14 + 1291 × 0.08 = 1089.49 darà il numero dei figli che gli inscritti in 1^a categoria morti da 23 a 24 anni lascierebbero in meno degli inscritti di 2^a categoria. Possiamo arrotondare tale cifra in 1200 per tener conto della differenza di prolificità dei morti al disotto dei 23 anni.

Ora, per compensare tale differenza, basterebbe che i 61,962 morti sopra 35 anni avessero, presso gli inscritti in 1^a categoria, una prolificità media di 0.02 figli superiore a quella degli inscritti in 2^a categoria. Già nella classe di 35-39 anni, la differenza è di 0.01 e i dati delle tavole seguenti fanno pensare che, per le età più alte, essa sia notevolmente superiore a 0.02.

Si avverta ancora che l'ipotesi che la probabilità di morte al di sotto e al di sopra di 35 anni sia, per gli inscritti in 1^a e 2^a categoria, uguale a quella della popolazione generale maschile, probabilmente si allontana dal vero. E' verosimile che gli idonei alle armi muoiano al di sotto dei 35 anni con minor frequenza della popolazione generale della stessa categoria di età e che quindi l'influenza della mortalità sotto i 35 anni venga, nel calcolo precedente, alquanto esagerata, facendo così apparire la prolificità media degli inscritti in 1^a categoria inferiore al vero.

Tenuto conto di queste varie circostanze, sembra dunque autorizzata la conclusione che l'obbligo al servizio militare non ostacola, ma sembra piuttosto lievemente favorire, la selezione sessuale e la riproduzione degli elementi della popolazione idonei alle armi e quindi superiori da un punto di vista eugenico.

6. Una conclusione di così grande importanza scientifica e pratica meritava conferma da parte di ulteriori ricerche.

Le tavole IX^a e X^a, XI^a e XII^a, XIII^a e XIV^a ne riassumano i risultati. Essi sono concordanti con quelli della ricerca precedente. Passiamoli brevemente in rassegna.

Le tavole IX^a e X^a si riferiscono ai richiamati e trattenuti alle armi del distretto militare di Siena e dei Comuni di Padova, Brescia, Motta di Livenza, Thiene, Schio, Grancona, Fontaniva, Tretto e Piovene. I dati furono raccolti nella prima metà del 1916, a cura di alcuni studiosi, alla cui gentilezza qui rendo grazie (1).

TAVOLA IX^a.

Distinzione per categoria dei militari richiamati o trattenuti alle armi del distretto militare di Siena e dei Comuni di Padova, Brescia, Motta di Livenza, Thiene, Schio, Grancona, Fontaniva, Tretto e Piovene, la cui famiglia è ammessa al soccorso giornaliero; numero delle loro famiglie con figli, oppure con moglie o figli; numero dei figli sovvenuti.

Classe di leva del militare	Numero delle famiglie ammesse al soccorso (1).		Numero delle famiglie per cui il soccorso è corrisposto ai figli (1).		Numero delle famiglie per cui il soccorso è corrisposto alla moglie od ai figli (1).		Numero dei figli ammessi al soccorso (1)	
	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat 1^a	Cat. 2^a e 3^a
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1890-93	1246	744	245	155	334	228	338	235
1887-89	1158	660	576	347	734	448	953	665
1884-86	896	598	642	437	730	502	1347	984
1881-83	877	311	682	243	767	272	1866	722
1876-80	1464	197	1195	155	1345	174	3681	488

(1) Per il Comune di Motta di Livenza, le poche famiglie di militari di 2^a categoria vennero classificate con quelle dei militari di 1^a, anzi che con quelle dei militari di 3^a categoria.

Si avverta che non per tutti i militari i registri dei sussidiati danno l'indicazione della categoria. Ciò spiega come il numero delle

(1) I dati del distretto militare di Siena furono fatti raccogliere dal prof F. Virgilii, mio collega in quella Università; quelli del Comune di Padova furono spogliati dallo studente Gino Scaroni; quelli del Comune di Brescia mi furono trasmessi dal segretario Comunale sig. Ferrari per cortese intercessione del dott. F. Carli; quelli del Comune di Motta di Livenza furono spogliati dal Cancelliere della Pretura sig. Ricci; quelli infine dei Comuni di Thiene, Schio, Grancona, Fontaniva, Tretto e Piovene furono raccolti, per incarico del prof. A. de' Stefani, da alcuni studenti dell'Istituto tecnico di Vicenza.

famiglie e dei figli considerato sia esiguo relativamente ad un così notevole insieme di popolazione.

Si avverta ancora che non tutti i congiunti bisognosi dei militari richiamati o trattenuti alle armi sono ammessi al soccorso, ma solo, in quanto sieno totalmente a carico del militare, i congiunti seguenti:

a) la moglie,

b) i figli legittimi o legittimati di età inferiore ai 12 anni, od anche di età superiore se inabili al lavoro;

c) i genitori che abbiano compiuto 60 anni di età ovvero sieno inabili al lavoro;

d) i fratelli o sorelle minori degli anni 12, od anche di età superiore se inabili al lavoro.

TAVOLA X^a^.

Stato civile e prolificità dei militari richiamati o trattenuti alle armi, la cui famiglia era ammessa al soccorso giornaliero nel distretto militare di Siena e nei Comuni di Padova, Brescia, Motta di Livenza, Thiene, Schio, Grancona, Fontaniva, Tretto e Piovene, distinti secondo la categoria.

Classe di leva del militare	Numero delle famiglie in cui il soccorso viene corrisposto alla moglie o ai figli, per cento famiglie sussidiate.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie in cui il soccorso viene corrisposto ai figli.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie in cui il soccorso viene corrisposto alla moglie o ai figli.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie ammesse al soccorso.	
	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1890-93	26.8	30.6	138	152	101	103	27	32
1887-89	63.3	67.8	165	192	130	149	82	101
1884-86	81.4	83.9	210	225	185	194	150	165
1881-83	87.4	87.4	274	297	243	265	213	232
1876-80	91.8	88.3	308	315	274	285	251	248

Di qui due conseguenze: *a*) che le colonne 2 e 3 della tavola X non danno percentuali esatte degli ammogliati o vedovi con figli tra i militari bisognosi, ma probabilmente percentuali alquanto più elevate; *b*) che le colonne seguenti non danno le medie esatte dei figli per cento matrimoni prolifici (col. 4 e 5), per cento matrimoni (colonne 6 e 7) e per cento militari (col. 8 e 9).

Se tali cifre non misurano esattamente la frequenza dei matrimoni e la prolificità delle singole categorie nei singoli gruppi di età, esse permettono però certamente di giudicare in quale senso e anche, approssimativamente, con quale intensità detti fenomeni variano, per gli inscritti ad una data categoria, dall'uno all'altro gruppo di età, o, per i militari di uno stesso gruppo di età, a seconda della categoria.

Esse mostrano (col. 2 e 3) che la frequenza dei matrimoni, inferiore dapprima tra gli inscritti alla 1ª categoria, va gradatamente avvicinandosi a quella degli inscritti alla 2ª categoria, fino a raggiungerla nel gruppo di 33-35 anni (classi di leva 1881-1883), per poi superarla nel seguente. Il numero medio dei figli per matrimonio (col. 6 e 7) o per matrimonio prolifico (col. 4 e 5) resta sempre inferiore nei militari di 1ª categoria, con una differenza però che, nell'ultimo gruppo di età (36-39 anni), diviene insignificante. In causa della maggiore frequenza dei matrimoni, gli inscritti in 1ª categoria presentano però, già in questi gruppi di età, una media di figli viventi alquanto superiore a quella degli inscritti in 2ª categoria.

7. Risultati concordanti ha dato una indagine eseguita, sotto la mia direzione, dall'Ufficio di Statistica Demografica del Ministero della Guerra (Direzione Generale Leva e Truppa). Detto Ufficio richiese (con lettera in data 15 maggio 1917) ad alcuni tra i distretti militari che la precedente corrispondenza faceva ritenere tra i più diligenti uno specchio dei congiunti dei militari sussidiati al 1° aprile 1917. Tra i distretti interrogati, solo quelli di Novara, Ivrea e Catanzaro poterono fornire dati distinti per i militari delle varie categorie.

Tali dati furono riassunti ed elaborati, ed i risultati si trovano esposti, con criteri analoghi a quelli seguiti per le tavole precedenti, nelle tavole XIª e XIIª. Analoghi sono pure i risultati per le classi di età corrispondenti, con la differenza che, per questi distretti, gli inscritti in 1ª categoria presentano già nelle classi di leva 1883-81 una percentuale più alta di ammogliati (col. 2 e 3) e una media superiore di figli viventi (col. 8 e 9).

Questa indagine ci permette però di risalire anche a classi di leva più anziane (1875-74) arruolate al principio del 1917. Ora si riscontra in esse che gli inscritti in 1ª categoria superano gli inscritti in 2ª categoria, non solo rispetto alla prolificità generale (col. 8 e 9), ma anche rispetto alla prolificità media per matrimonio (col. 6 e 7) e per matrimonio con figli (col. 4 e 5), mentre mostrano una percentuale uguale di ammogliati (col. 2 e 3).

Si deve tenere presente che non tutti i militari delle classi 1874 e 1875 furono richiamati: andarono esenti i cittadini che avevano uno o più figli in servizio sotto le armi o morti sotto le armi e così pure quelli che avevano 4 o più figli conviventi e a loro carico (1). Ciò spiega come le percentuali degli ammogliati e le medie del numero dei figli risultino, per queste classi, più basse che per le precedenti.

8. Due ultime ricerche, eseguite pure sotto la mia direzione dall'Ufficio di Statistica Demografica del Ministero della Guerra, riguardano lo stato civile e la prolificità dei militari morti sul campo

TAVOLA XI

TAVOLA XI'

Distinzione per categoria dei militari richiamati o trattenuti alle armi dei distretti militari di Ivrea, Novara e Catanzaro, la cui famiglia è ammessa al soccorso giornaliero; numero delle loro famiglie con figli, oppure con moglie o figli; numero dei figli sovvenuti.

Classe di leva del militare	Numero delle famiglie ammesse al soccorso.		Numero delle famiglie per cui il soccorso è corrisposto ai figli.		Numero delle famiglie per cui il soccorso è corrisposto alla moglie o ai figli.		Numero dei figli ammessi al concorso.	
	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1894-93	3806	2296	538	351	882	591	960	613
1892-90	8257	3541	2573	1426	3811	1854	4798	2935
1889-87	7671	3699	4552	2173	5395	2563	9192	4698
1886-84	6489	4270	4568	3024	5081	3391	10,885	8021
1883-81	5900	3983	4487	2858	4822	3110	11,672	7551
1880-78	5741	3690	4525	2617	4877	2882	11,907	7558
1877-76	3618	2182	2946	1670	3202	1840	7660	4419
1875-74	1237	931	909	670	1069	805	1741	1170

(1) Cfr. Art. 2 della Circolare 15. *Reclutamento, mobilitazione e formazione di guerra. Decreto luogotenenziale avente valore di legge n. 7 col quale i militari gia prosciolti delle classi 1875 e 1874 sono sottoposti al servizio militare.* (Direzione Generale Leva e Truppa) 5 Gennaio 1917. Giornale Militare, 1917. Dispensa numero 3.

o negli ospedali mobilitati e dei militari morti negli ospedali territoriali.

Per i militari morti sul campo o negli ospedali mobilitati, le notizie sono ricavate dalle schede che i Comuni dovevano riempire all'atto in cui ricevevano la notificazione della morte del militare da parte dell'Ufficio di Stato Civile in guerra. Dette schede cominciarono ad inviarsi per i militari la cui morte fu denunciata dopo l'ottobre 1916 e furono sospese, per un diverso ordinamento dato all'Ufficio di Stato Civile in guerra, quando questo dal Ministero della Guerra passò alla dipendenza di quello dell'Assistenza militare e delle Pensioni di guerra. Ai fini della nostra indagine, si dovettero naturalmente lasciare da parte le numerose schede, nelle quali mancava l'indicazione della categoria del morto. I dati raccolti ed elaborati riguardano in ogni modo 103.443 militari morti sul campo o negli ospedali mobilitati, lasciando 53.131 figli. Essi sono esposti nelle tavole XIII^a^ e XIV^a^.

TAVOLA XII^a^

Stato civile e prolificità dei militari richiamati o trattenuti alle armi, la cui famiglia è ammessa al soccorso giornaliero nei distretti militari di Ivrea, Novara e Catanzaro, distinti secondo la categoria.

Classe di leva del militare	Numero delle famiglie, in cui il soccorso viene corrisposto alla moglie o ai figli, per cento famiglie sussidiate.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie in cui il soccorso viene corrisposto ai figli.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie in cui il soccorso viene corrisposto alla moglie o ai figli.		Figli ammessi al soccorso per cento famiglie ammesse al soccorso.	
	Cat. 1^a^	Cat 2^a^ e 3^a^	Cat 1^a^	Cat. 2^a^ e 3^a^	Cat 1^a^	Cat. 2^a^ e 3^a^	Cat. 1^a^	Cat. 2^a^ e 3^a^
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1894-93	23.1	25.7	178	175	109	104	25	27
1892-90	46.1	52.3	186	206	126	152	58	83
1889-87	70.3	69.2	202	216	170	183	120	125
1886-84	78.3	79.4	238	265	214	237	168	188
1883-81	81.7	78.0	260	264	242	243	198	189
1880-78	84.9	78.1	263	289	244	262	207	205
1877-76	90.9	84.3	260	265	239	240	240	207
1875-74	86.4	86.4	192	165	163	145	149	126

Per i militari morti negli ospedali territoriali, le notizie sono ricavate da schede appositamente inviate dall'Ufficio di Statistica Demografica ai Comuni sulla scorta degli elenchi dei morti trasmessi dagli ospedali territoriali e dai Comuni restituite con le indicazioni sulla categoria e su altri caratteri del morto che l'ufficio non possiede. Tali schede, che dovranno essere compilate per tutti i militari la cui morte fu denunciata dopo l'ottobre 1916, sono ancora in corso di raccolta. Molte di quelle già restituite, d'altra parte, mancano delle indicazioni sulla categoria del morto e non si poterono quindi usufruire per la presente indagine. Esse hanno permesso, in ogni modo, di raccogliere fin da ora e di elaborare dati relativi a 16.223 morti negli ospedali territoriali, lasciando 10.969 figli. Questi dati sono esposti nelle tavole XV^a e XVI^a.

A differenza di quello delle precedenti indagini, questo materiale non si riferisce solo a classi di popolazione bisognosa, ma a tutte le classi sociali nella misura in cui esse hanno contribuito ai morti in combattimento o negli ospedali militari. Esso non va

TAVOLA XIII^a.

Distinzione per categoria dei militari morti sul campo o negli ospedali mobilitati; loro stato civile e numero dei loro figli sopravviventi.

Classe di leva del militare	Numero dei militari morti.		Numero dei militari morti coniugati o vedovi con figli.		Numero dei militari morti coniugati o vedovi.		Numero dei figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi.		Numero totale dei figli lasciati dai militari morti.	
	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a	Cat. 1^a	Cat. 2^a e 3^a
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1899-96	21,145	4919	172	80	261	106	238	108	266	110
1895-93	15,063	4398	374	197	521	250	525	299	539	307
1892-90	11,512	3326	1435	596	1898	779	2071	925	2087	927
1889-87	8951	3360	3153	1422	3926	1672	5382	2754	5391	2756
1886-84	6904	3657	3853	2127	4510	2462	8247	4949	8253	4950
1883-81	5494	2680	3575	1750	4075	1959	9075	4867	9080	4868
1880-78	2294	1349	1600	955	1801	1064	4693	2944	4693	2948
1877-76	613	298	426	210	484	235	1340	692	1340	693
1875-72	65	31	30	16	35	19	86	39	86	39

soggetto, rispetto alla misura della percentuale degli ammogliati e vedovi e della prolificità media, alla incertezza segnalata per il materiale relativo alle famiglie sussidiate. Ma presenta, d'altra parte, l'inconveniente che i dati raccolti per le classi di leva più anziane, le quali per la nostra indagine presentano il massimo interesse, sono molto esigui, e quello altresì che i militari morti di 1ª categoria differiscono da quelli di 2ª e di 3ª secondo fattori che hanno un'influenza sulla nuzialità e sulla prolificità. Ciò fa sì che poca ed incerta luce sul problema discusso nel presente articolo possa trarsi dai risultati di queste due ultime ricerche, che tuttavia ritengo opportuno di pubblicare, e per imparzialità scientifica, e perchè essi possono forse riuscire utili ad altri indagatori per l'esame di problemi diversi.

A codeste circostanze si possono far risalire talune discordanze che si riscontrano, sia tra i risultati dell'una e quelli dell'altra di queste due ultime ricerche, sia tra i risultati di entrambe e quelli delle ricerche precedenti.

I risultati di entrambe le ricerche discordano anzitutto da quelli delle precedenti in quanto, per le classi 1883-1881, 1880-78, 1877-76,

TAVOLA XIVª.

Stato civile e prolificità dei militari italiani morti sul campo o negli ospedali mobilitati distinti per categoria.

Classe di leva del militare	Militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti.		Figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti coniugati o vedovi con figli		Figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti coniugati o vedovi.		Figli lasciati dai militari morti per cento militari morti.	
	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1899-96	1	2	138	135	91	102	1	2
1895-93	3	5	141	152	101	120	3	7
1892-90	16	23	145	155	109	119	18	27
1889-87	44	50	171	194	137	164	60	82
1886-84	65	67	215	233	183	202	119	135
1883-81	74	73	254	278	223	249	165	181
1880-78	79	78	294	308	276	278	205	218
1877-76	79	79	314	329	277	294	219	232
1875-72	54	61	287	244	246	205	132	126

il numero medio dei figli per morto (col. 8 e 9) appare in essi ancora inferiore per i morti di 1ª categoria, e la percentuale degli ammogliati mostra tra questi solo una lieve e non costante superiorità (col. 2 e 3). Tali discordanze sembrano potersi plausibilmente spiegare con le differenti date a cui furono chiamate le varie categorie. Mentre invero per le classi di leva anteriori al 1876 e posteriori al 1896 la 3ª categoria fu chiamata alle armi, durante la guerra europea, contemporaneamente alla 2ª e alla 1ª, per le classi 1896-1876 essa fu chiamata posteriormente, e l'intervallo fu particolarmente notevole per le classi 1884-1876. Gli inscritti in 3ª categoria di queste classi poterono quindi continuare per un certo tempo a prolificare e a sposarsi quando i loro coetanei di 1ª e 2ª categoria, già sotto le armi, ne erano generalmente impediti. Può avère contribuito altresì ad originare le discordanze sopra accennate il fatto che, tra i morti di 1ª categoria, sono compresi tutti i militari di carriera, tra i quali è notoriamente frequente il celibato e scarsa la prolificità.

TAVOLA XV'.

Distinzione per categoria dei militari italiani morti negli ospedali territoriali; loro stato civile e numero dei loro figli sopravviventi.

Classe di leva del militare	Numero dei militari morti.		Numero dei militari morti coniugati o vedovi con figli.		Numero dei militari morti coniugati o vedovi.		Numero dei figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi.		Numero totale dei figli lasciati dai militari morti.	
	Cat. 1ª	Cat 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1899-96	3482	789	25	12	39	18	29	15	32	16
1895-93	2011	518	69	35	88	44	98	47	98	47
1892-90	1785	476	206	100	296	120	323	180	325	182
1889-87	1304	539	448	235	558	282	893	465	895	468
1886-84	1100	593	575	349	695	410	1290	794	1291	796
1883-81	927	509	606	328	687	378	1529	969	1531	969
1880-78	759	425	496	291	571	331	1456	959	1456	959
1877-76	365	288	240	195	278	217	728	708	728	709
1875-74	179	124	98	80	123	97	223	191	223	191
1873-59	37	13	14	8	19	8	32	21	32	21

Questa ultima circostanza deve assumere particolare importanza per le classi anteriori al 1876 e spiega le percentuali notevolmente inferiori di coniugati o vedovi tra gli iscritti in 1ª categoria appartenenti a queste classi che risultano da entrambe le rilevazioni.

Le due rilevazioni discordano invece per quanto si riferisce alla prolificità delle classi anteriori al 1876. Mentre dalla tavola XIVª risulterebbe per le classi 1875-72, in armonia con i risultati delle precedenti indagini, una netta superiorità da parte degli inscritti di 1ª categoria su quelli di 2ª e di 3ª, sia rispetto alla prolificità media generale (colonne 8 e 9), sia rispetto alla prolificità media per matrimonio (colonne 6 e 7) e per matrimonio fecondo (colonne 4 e 5), il contrario si verifica per le classi 1875-74, e ancor più spiccatamente per le classi 1873-59, secondo i risultati esposti nella tavola XVIª. In entrambe le ricerche, i numeri dei casi considerati per queste classi sono troppo piccoli per poter ritenere i risultati significativi ed attribuire pertanto importanza alle discordanze riscontrate. La fre-

Tavola XVIª.

Stato civile e prolificità dei militari italiani morti negli ospedali territoriali, distinti per categoria.

Classe di leva del militare	Militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti.		Figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti coniugati o vedovi con figli		Figli lasciati dai militari morti coniugati o vedovi per cento militari morti coniugati o vedovi.		Figli lasciati dai militari morti per cento militari morti.	
	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª	Cat. 1ª	Cat. 2ª e 3ª
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1899-96	1	2	116	125	74	83	1	2
1895-93	4	8	142	134	111	106	4	9
1892-90	16	25	156	180	109	150	18	38
1889-87	42	52	199	197	160	164	68	86
1886-84	63	69	224	227	185	193	117	134
1883-81	74	74	252	295	236	256	165	190
1880-78	75	77	293	329	255	289	192	225
1877-76	76	75	303	363	261	326	199	246
1875-74	68	78	227	238	181	197	124	154
1873-59	51	61	228	262	169	262	86	161

quenza dei militari di carriera tra i morti di 1ª categoria delle classi 1875-74, e ancor più tra quelli delle classi 1873-59, sembrerebbe atta, in ogni modo, a spiegare i risultati, in contrasto con quelli delle precedenti indagini, relativi al morti negli ospedali territoriali.

9. Le conclusioni che sgorgano dalle precedenti indagini dirimono — se non mi inganno — la controversia sopra gli effetti disgenici o eugenici della coscrizione militare.

Coloro che sono sottoposti alla ferma militare si sposano più tardi dei loro coetanei, pure idonei alle armi, che da essa vanno esenti completamente o quasi; ma si sposano con maggiore frequenza, come se l'aver compiuto il servizio militare costituisse un titolo di preferenza nella selezione matrimoniale.

Fino ad una certa età, che, secondo i risultati delle varie indagini, varia da circa 25 a circa 40 anni, il numero medio dei figli viventi risulta, per coloro che hanno compiuto la ferma militare, inferiore che per i loro coetanei, pure idonei alle armi. Ciò è evidentemente in relazione con la minore durata dei loro matrimoni. Oltre 40 anni, invece, se non prima, coloro che hanno compiuto la ferma militare, hanno in media un numero di figli viventi superiore ai loro coetanei, pure idonei alle armi. Ciò è vero, non solo se, nel calcolare la media, si considerano tutti i militari, ma anche se si considerano solo i militari ammogliati o, tra questi, solo quelli con figli. I risultati discordanti ottenuti dall'indagine sui morti negli ospedali territoriali non rimangono senza plausibile spiegazione. Per quanto ammogliatisi più tardi gli idonei alle armi sembrano dunque dar luogo a matrimoni più prolifici, come se il favore di cui godono nella selezione matrimoniale permettesse loro di impalmare donne più giovani o, indipendentemente dall'età, più sane e robuste e conseguentemente più feconde.

La mortalità durante il periodo giovanile, nel quale coloro che hanno compiuto la ferma militare risultano più spesso celibi, e, se ammogliati, presentano, in causa del ritardato matrimonio, un minor numero di figli, tende naturalmente a ridurre il vantaggio, che, nei rispetti della riproduttività, ad essi deriva dalla più bassa quota definitiva di celibi e dalla più alta prolificità definitiva dei loro matrimoni. Ma non sembra che essa lo elimini totalmente.

Pare dunque autorizzata la conclusione che la ferma militare favorisce, o quanto meno non ostacola, la riproduttività di coloro che vi sono sottoposti, in confronto ai loro coetanei ugualmente idonei alle armi, che ne vanno, totalmente o quasi, esenti.

Il preteso danno che la coscrizione militare eserciterebbe sulla razza, in quanto tenderebbe a ridurre la riproduzione degli elementi della popolazione fisicamente superiori, risulta dunque del tutto insussistente. Pare anzi che, non un danno, ma un vantaggio in tal senso essa eserciti.

Noi non abbiamo elementi per giudicare se la coscrizione militare eserciti un danno reale in quanto coloro che vi sono sottoposti sieno maggiormente esposti e vadano più di frequente soggetti alle malattie veneree, ma il fatto che la riproduttività loro non ne risulta affatto diminuita in confronto a quella dei loro coetanei pure idonei alle armi fa pensare che, se vi è un reale danno in tal senso, esso non può essere grave.

I risultati raggiunti in questo studio hanno — ben s'intende — un valore positivo solo per l'Italia, a cui essi si riferiscono, ma è evidente che essi hanno un valore suggestivo per ogni altra nazione, in cui il sistema del servizio militare non sia regolato in modo essenzialmente diverso da quello del nostro paese.

Padova, R. Università, Novembre 1919.

CORRADO GINI.

The Theory

of Large Population-Aggregates

SYNOPSIS — 1. General — 2. The compound interest law. — 3. Impossibility of any long continued increase at constant rate. — 4. Race or group antagonisms. — 5. Limiting density of population. — 6. Factors influencing the limiting density of population. — 7. Intelligence and knowledge as factors influencing population-density. — 8. Difference between movement of population for decades and centuries. — 9. Estimations of the world's population. — 10. Censuses of population and their correlation with social-economic facts. — 11. Statistical prevision. — 12. Conclusion.

1. — *General.* There are two ways in which the phenomena of large population-aggregates may be studied. In the one the mere aggregates for successive moments of time are examined in their entirety — all details are ignored. In the other an endeavour is made to ascertain the progression of the conponent elements, from the summation of which the actual results may be assumed to have arisen. When past results are used to estimate the future, the results derived from the two methods will probably differ, and it is not always easy to decide «a priori» which is to be preferred. Essentially, extrapolations of past movements of facts are in any case empirical, or at best are only quasi-rational, as determinations or estimations of the future. Examinations of statistical facts in their entirety, or in their detailed elements, are each appropriate to certain ends, but the difference between the two methods is fundamental; and it does not necessarily follow that extrapolations, obtained by the preliminary analysis of the contributory elements, will give results of a higher order of precision than can be obtained from the mass facts themselves, as may be readily illustrated as follows:

The population of the United States of America in 1790 was 3.93 millions, and in 1820, 9.64 millions. If the simplest possible assumption be made, viz. that the rate of increase was perfectly constant, and continued so, we should get the results on the upper line of the table hereunder; the actual census figures being given on the lower line.

YEAR	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880
At constant rate	3.93 (1)	5,30	7.15	9.64 (1)	13.00	17.53	23.65	31.89	43.01	58.00
Actual Census	3.93 (1)	.5,31	7.24	9.64 (1)	12.87	17.07	23.19	31.44	38.56	50.16
Elkanah Watson	—	—	—	—	12.83	17.16	23.19	31.44	42.33	56.45

In the year 1815 the American statistician, Elkanah Watson, predicted the population of the United States for many decades ahead from some theory which, so far as we are aware, has never been disclosed. By differencing the result it can easily be shewn that his theory was of a complex character, and doubtless his predicted numbers, wich were given up to the year 1900, were a result of summations of contributory elements, the change of which with the lapse of time he believed he could forecast.

The preceding table shews that up to the year 1860 his predictions were confirmed in the most astonishing manner. From that date onward, however, his predicted result were very much in advance of the actual results. The reasons for this will appear later.

Returning to the table: if the assumption be made that the population-numbers are due to a constant rate of increase, and if we determine that rate of increase from the actual census results, say, for 1790 and 1820, we should get the figures shewn in the upper line of the table. These results are in close agreement with the actual census counts, but after the year 1860 they differ more than the predicted results of Watson. We thus see that, whatever his theory was, Watson was able to represent with extraordinary accuracy the facts up to 1860. His prediction was made in the year 1815, and he obtained very much batter results than he would have obtained had he assumed that the rate of increase, which would give the 7.24 millions in 1810 from the 3.93 millions in 1790, continued to apply. If we took the rate which would give 9,64 millions in 1820 from the 3.93 millions in 1790 we get the figures in the upper line which also are very close to the actual population, but ultimately deviate more therefrom than Watson's figures.

(1) Basis of estimation of constant rate.

From the results taken as a whole we see that from the year 1790 to 1860 the population sensibly increased at a constat rate.

It is not unimportant to observe that social-economic events intervened, and that these invalidated both the assumption of constant rate of increase and the more complex assumption which Elkanah Watson had made. A certain change occurred during the several decades about this time which has been described by F. A. Walker. There were few rich, and on the whole very few poor. Food was abundant, social traditions and religious beliefs both encouraged fecundity. The country enjoyed domestic tranquillity, and the land was but partially settled. Mechanical labour was scarce, and even on the farms it was difficult to command hired services, most of the young men who went out to work for limited periods being intent on getting ready money to enable them to marry. This lasted down nearly to 1850. Between 1840 and 1850 the immigration from Ireland and Germany was very great, rising to 1.71 millions, as against 0.60 in the previous decade. The change produced, viz. from a traditional rate of increase of 3 per cent. per annum to a much lower rate, was due to the abandonment of early simplicity for comparative luxury, the consequent rise in the « standard of living », the multiplying of artificial necessaries, the extension of paid domestic service, and the introduction of factory labour. From 1850 to 1860, the immigration rose to 2.58 millions till at last about one-seventh of the population had come from abroad. Then the war of secession and its consequences followed: the whole operating to lower the rate of increase, disclosing the fact that moral causes are more potent than physical. Thus we see that if we predict on the basis of past experience, we can hope for success only if there be reason to believe that the general circumstances are unchanged.

The value of this illustration is that it shews several things:

(I) That in any considerable population the tendency is to increase in a constant ratio ; but also.

(II) That this is only a tendency, which may be modified by other factors coming into operation.

We may note in passing that social-economic changes may greatly vary the rate of increase, and a little consideration will shew that under ordinary circumstances immigration cannot replace natural fecundity.

2. — *The compound interest law.* Given two populations, identically characterised in every way, but differing solely in magnitude, it is obvious that their increase in any given unit of time will be proportional to their magnitude. So too, if increase does not cause a given population to alter in any way its characteristics, its rate of increase in the given unit of time will be independent of its size; that is, its absolute change depends solely upon its magnitude.

The assumption as regards the increase operating in the example given, viz, that which gives the figures in the upper line of the table is that at every instant the population is growing at the rate of 0.02991 per annum, which is equivalent to an addition of 30.362 persons per annum to every million at the commencement of any year, or 348,644 per million to the population at the beginning of any decennium. These are equivalents. The tendency is therefore expressed by the equation

$$P_t = P_o \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt} = P_o e^{rt};$$

in which N represents the number of uniform intervals of time, extending over the period t at the uniform rate r per unit of population; P_o denotes the population at the time when $t = 0$ and P_t the population after the time t has elapsed.

3. - *Impossibility of any long continued increase at a constant rate.* The compound interest law, even for a very small rate of increase leads soon to astonishingly large numbers. In human increase, 3 per cent. per annum is large, and the arrival therefore in the United States of the time when this rate could no longer be maintained was not long delayed. In no circumstance can such a rate continue for a long period. Let us suppose a much lower rate, viz. 1 per cent. per annum, i. e. let us suppose that by the end of any year each 100 in the population at the beginning shall have become 101 and that we start with 1,000. We should then have the following

End of year	1	2	3	10	100	1000	10000
Numbers	1010	1020.1	1030.3	1104.6	2704.8	20,959,150	$1,635,821 \times 10^{40}$

Thus in the period of history an original thousand, increasing at 1 per cent. per annum would become a number so great that we can form no adequate conception of it. We can get some faint idea of what it means by supposing that, instead of a human being, we have an organism in the form of a cube, the side of which is only the one-hundred-thousandth part of an inch. Let us further suppose these to be aggregated in the form of a cube and to be in contact with one another: this larger cube would have a side of no less than 400,649 miles. This result shews how thoroughly absurd it is to suppose that the increase of human beings can continue for a few centuries even at as low a rate as 1 per cent. per annum, or that that the exponential law $P_t = P_o e^{rt}$ can hold good for any but very limited periods. It cannot express the phenomena of increase for centuries. In other words a slowing of the rate is inevitable.

4. — *Race or group antagonisms.* Let us now examine some important consequence of this result. If there be two population-groups whose interests are not common, and they both increase even at the limited rate of 1 per cent. per annum, then leaving out all considerations of food supply they must *inevitably* come into collision, for they will want even the room to expand. We may easily deduce an expression by means of which the number of years necessary for any group to double itself can be calculated provided we know the rate of increase; r say. Let n be the number of years required, then

$$n = 0.347 + (0.6932/r).$$

Thus if $r = 0.01$, we have 69.67 as the period, or in rough figures say 70 years. Thus we easily obtain the following result for the years necessary for the population to double itself, the rate of increase being expressed in a percentage per annum.

Increase-rate	0.1	1	2	3	4	5 %
Years	693.1	69.67	35.00	23.34	17.67	14.21

If we take 70 years as a round number, we have, for 1,000 million initial population, and a 1 per cent. annual increase, the following result for 70, 140, ...etc. years.

Years	70	140	210	280	350	420	490
Millions	1,000	2,000	4,000	8,000	16,000	32,000	64,000;

that is, in 490 years, about 38 times the present population of the earth which is roughly 1,700 millions. We see from this that collisions of interest cannot possibly be avoided unless there is some common control of the rate of human increase.

So long, therefore, as any given population is determined to « increase and multiply » —come what will— so long will collision with the interest of neighbouring populations be certain to arise. The clash of interest may not always be clearly perceived but it is none the less real and active, and will certainly manifest itself either directly or indirectly.

5. — *Limiting density of population.* Many persons are posseded of a fatuous idea that cheminal, biological, physical and industrial discoveries and advances may indefinitely postpone the collision of interest referred to. That this is true only for a very small period is shewn by the fact that in a number of years much less than those of human history, the whole solar system would not suffice for the material bodies of a people increasing at the rate of 1 per cent. per annum. There is obviously, therefore, a limit to the possibile density of population. The nature of this limit we shall now consider.

For any given territory and for a given standard of living, there is a certain density of population, which ultimately corresponds to the greatest possible food-supply, however slow the rate of increase. This may be called the population-limit for that territory in the given circumstances. Actually, it must of course always be reached asymptotically when conditions are stable. This is readily seen to be involved by considering the expression « greatest possible food supply ». For any given degree of skill in meeting human needs, there is a limit which cannot be passed, forasmuch as production is necessarily governed by what has been called the « law of diminishing returns ». Thus if there is always some increase, r must diminish with the increase of t, and yet never become zero. We shall not, however, consider at this juncture what expression is indicated as best or most appropriate to represent the change.

As the limit above indicated is approached, pressure is put upon the population to meet the situation so arising, and obviously the limit can be altered by various conditions, for example by change in the standard of living or by the effect of new discoveries re-enforcing human skill in food production. But since *ex hypothesi* a population cannot increase unless some condition is changed, its death and birth rates must ultimately be equal: that is we reach the *stationary state* corresponding to the totality of the conditions. Of course, if a change of conditions takes place the rate of the population will again vary.

6. — *Factors influencing the limiting density of population.* When in any given region the stationary state has been reached, we may call the quotient found by dividing the population by the area occupied, the *limiting density* of the population under the existing conditions. But since both external conditions and standard of living can be varied, the limiting density can be changed through a somewhat wide range, and this range is dependent upon a number of things, wich can be classified under two headings, viz:

(I) Those independent of, and
(II) Those dependent upon human intervention.

To the former belong: — (1) material resources of the region or territory occupied; these may be (a) actual, or (b) potential: and (2) the cosmic energies which facilitate or hinder human development. To the latter belong: (3) Those branches of knowledge which facilitate the conversion of potential into actual resources; (4) social and other standards which react upon the rate of production or consumption. Because so much depends upon human resourcefulness, and upon the standards of living, the quantitative estimation of the resources of Nature can never be simple: thus initially a territory may be prodigal with those forms of vegetable and animal life which provide immediately for human wants; these may be used with circumspection or recklessly. Its meteorological and climatic factors may be propitious; these may be availed of or neglected. It may possess large stores of readily available wealth, (e.g. coal and iron) or of energy convertible into wealth, (e. g. water power); these may be exploited or left untouched.

In a very narrow survey of human affairs, so limited that social organisation and ideals may be regarded as fairly constant, favourable general conditions, meteorological, financial or other, augment the marriage and birth rates, and — considered locally —tend to augment also immigration. Thus, population is increased sometimes only to be hindered later by unfavourable conditions, operating adversely. In a larger survey, we see that civilisations arise, flourish, and pass away, often leaving their trace only in the splendid monuments created by them. Cities perish and are buried. Millions become thousands, and none can tell what Destiny has in store even for the whole human race.

7. — *Intelligence and knowledge as factors influencing population-density.* The resources of Nature may be exploited passively or actively by living organisms, and it is self-evident that, in the latter case, intelligence and knowledge play a significant role. For example, the use of artesian waters or schemes of irrigation to render arid districts fertile; chemical or other fertiliser or crop-rotation to ensure an increase of harvests; the conversion of the energy of falling water into the form of electric current; the application of wind or water power, to useful purposes; these are examples of the exercise of intelligence in meeting human requirements. And in these, systematised knowledge — science — plays a notable part. Without a knowledge of physics, chemistry, biology, pure and applied mathematics, the mode of using Nature's resources might either be wholly unknown, or misconceived.

Arid regions have been made fertile by irrigation, and by the use of chemical or natural fertilisers, and in this way the population-carrying power has been advanced. Chemical and mechanical science has enabled the atmosphere to be exploited for nitrogen, the means of transport of food supplies and other necessaires has been advanced by engineering skill, labour has become more efficient by the supplementary power of mechanism, sources of energy formerly unthought of are used.

In some cases we are exhausting stored energies, as in exploiting coal-fields, salt deposits, artesian waters, etc.: in other cases that may not be true: whether we should look on the resources of Nature as practically inexhaustible for a definitely limited population or not cannot yet be affirmed with certainty but is a very material question in regard to human development and its limits.

Here we may observe that with the age-long vicissitudes of the human race we are perhaps not concerned: for us it is the problems of the nearer future that are pressing. The developments of mathematics, physics, and chemistry, their application in the mechanism of production, in the navigation of sea and air, in the communication of knowledge, and in the creation of instruments of utility to Man, have enlarged his powers of exploiting Nature's resources, and have thus tended to raise enormously his rate of increase. Luxury in the scale of living has counteracted this tendency, and a very little consideration will shew that the standard of living prevailing will be a factor immediately governing the advance or retrogression of the human race. No conceivable accession of power over Nature can make possible the continuance for even five centuries of the rate of increase characterising the Western world for the past few decades.

8. — *Difference between movement of population for decades and centuries.* We have already referred to the change of the rate of increase and indicated why that rate must ultimately become zero. It is easy to ascertain from general considerations the characteristics of the curve shewing the variations in the values of the rate. As a population adapts itself to a territory, its rate of increase will grow, reach a maximum — when all things are most advantageous — and, owing to the forces which limit its density, will after that decline, and finally asymptotically approach zero. Now these charasteristics can all be represented by a simple curve, such for example as is represented by the exponential expression $T = k.t^{m - nt}$, or $= k.t^{m(1 - qt)}$ With m and n or q positive, the value of this must approach zero for very large values of t. The graph of this is ordinarily an unsymmetrical « bell-shaped » curve, but, by taking suitable values of m and n, its left-hand branch may be made most steep at the origin, or, on the other hand, may be made to increase in steepness before it again diminishes.

Owing to the vicissitudes of climate and rainfall, to varying meteorological conditions, to the spread of diseases or forms of life inimical to Man (either by direct attack on his life, or by indirect attack through his food-supply) to the vagaries of the races of mankind, to migrations, and similar causes, the curve of rates so deduced can be regarded as merely approximately expressing the general trend. All favourable conditions tend to augment the rate of increase and unfavourable to diminish it, and of course it may actually become negative through unfavourable conditions, of which the most notable example in modern history is « the Thirty Years War ». And, taking a wider wiew still, it appears certain from geology that there are great cycles favourable to animal life at one period and unfavourable at another. All these variations on the general curve may be called *oscillations* of rate.

Thus we may anticipate, that in yearly results, we shall find small oscillations about the decennial trend; larger ones perhaps when one compares the decennial results with the centennial trend, and similarly in regard to the centennial and millenial trend. For this reason population estimates are to be desired, but as statistical observation is only recent they are not available, and, as shewn hereunder, accurate estimates of population do not extend back even for 100 years.

9. — *Estimations of the World's Population.* Estimates for the years 1600 (Riccioli) to 1789 (W. Black) ranged from 500 to 1,600 millions and can be regarded only as mere guesses. The mean of ten estimates made between 1804 and 1822 was about 673 millions, say for the year 1810; and of thirteen made between 1824 and 1840 was 871 millions say for the year 1817. Ten between 1845 and 1874 gave for the year 1868 the mean 1,295 millions, and ten between 1878 and 1910, 1,488 millions for the year 1891. For the year 1914 the writer estimated the world's population to be 1,649 millions.

Thus we have:

Year	1810	1817	1868	1891	1914
Millions	673	871	1,295	1,488	1,649

These results are not of sufficient precision to make therefrom any secure deductions as to the nature of the rate of the world's increase of population during the last century and the beginning of this. If, however, we reject the first result as very uncertain, we have average linear increases per annum 8.31, 8.39, and 7.00 millions. If these figures could be relied upon, they would imply that the rate of increase characteristic of the decades 1820 to 1870 was augmented during the decades 1870 to 1890, but has fallen off for the decades 1890 to 1910. Whether this be any indication of a falling off due to increase in the « standard of living » or not, one cannot assuredly say; but if the rate of increase were constant the average linear rate per annum should have been increasing. It is not improbable that the recent advance of luxury has tended to operate against population growth.

10. — *Censuses of population ad their correlation with social-economic facts.* For countries with stable and intelligent Governments, there is no real difficulty in ascertaining with considerable accuracy the growth of population. For a considerable part of the world, however, there can at present be no ground of assurance that their estimates of population are reasonably satisfactory as regards precision. Consequently world-deductions are at present upon an insecure basis. It is an international necessity, at least for the larger and more advanced nations, to know their own progress and that of each other: only in this way can questions of expansion be properly gauged, and the probable issues of the future ascertained. The impinging of the interests of national groups can indeed be studied only by this means: it is a necessity for all effective study, the purpose of which is to discern the difference between national issues that arise from expansive force, and those vhich are promoted solely for the benefit of small groups within the nations, viz., those who are prepared to sacrifice for their individual advantage the wellbeing of the larger groups of which they form but parts.

It is easy to see that we are sorely in need of close analyses of the mutual reactions of the social and economic factors upon the question of the rates of population increase. Only by these analyses can we hope to ascertain the drift of the future with such certainty that all necessary preparation and control can be foreseen and undertaken.

11.—*Statistical Prevision.* All detailed analyses are, of course, of assistance in forecasting the trend of the future. If we can so marshall the facts concerning birth, marriage and death rates, the economic factors which influence them, the meteorological factors which govern the latter, it may be possible to forecast for a few decades the movements of populations with some assurance that the limits of error will be relatively small. But there are psychical factors which are very difficult to forecast, for among the social factors of the first order of importance is the general attitude of a community to the question of standard of living (which ranges from the simplicity of the savage to the ostentation of the most sumptuous), and the attitude towards the question of fecundity of the Russian, Hungarian, Hindu, etc). The attitudes of peoples to fecundity and to luxury, however, are closely associated with ideas that cannot be quantitatively examined; and therefore the issues cannot be assuredly gauged except in so far as the psychical factors operate in so regular a manner as to be fully reflected in the numerical changes. As this will often be the case, the properly determined predictions of the statistician as to the future populations of any territory, may be regarded as secure even with the regulary changing mental or ethical developments of the population in question. In any case, strange variatons in rates of increase are sign-posts to the student of human affairs indicating significant change of events.

12. — *Conclusion.* To sum up, any large population-group must necessarily tend at each moment to increase according to an exponential law with a positive index and the rate of which initially may accelerate. In all cases this rate must ultimately decrease, until it becomes zero. Adverse social and economic conditions, or migration effects, may, for more limited periods, increase or diminish the general rate, since such rates react upon the social organism, for example in such a way as to increase or diminish the marriage and consequently the birth-rate, increase or diminish the death-rate, extend or diminish the average duration of human life, and so on.

In order to realise what must be the general history of large population aggregates we need to develop an « a priori » method: by its means we can anticipate what may be the normal development. Accessions of knowledge, however, and widespread changes in regard to standards of living can operate to produce sharp changes in population facts. After these have transpired, they may be regarded as furnishing, as it were, a new datum value from which the future may be considered (in other words, the P in the formula previously given may quickly rise to some new value). The result of the increase will always be that the limiting density corresponding to the totality of existing conditions is more quickly approached and, as it is approached, it becomes more and more difficult for the same rate of increase to be maintained. And ultimately it cannot be maintained, and as soon as this is the case collisions with neighbouring population-groups is inevitable. These are unavoidable so long as any group regards itself as entitled to expand irrespective of the rights of adjoining groups. Such collision is, of course, war, and war is inevitable unless concerted action is possible, the object of which is to come to a common agreement as to rate of increase. This can be reached only with a high state of discipline and knowledge. The present population of the world, and its recent rate of increase, is such that it cannot be maintained even for a few centuries, since it may easily be shewn that no possible accession of food supplies could meet the requirement. Thus, if we consider national groups only, the divergencies of the social-economic factors may be so great as to indicate the advance of one people at the expense of another. A study of such advance shews that it may be necessary to make detailed studies of changes in the constitution of a population and to determine the drift of social-economic conditions, and their reactions upon the rate of increase. In so far as the acts of government can favourably influence rate of increase, they must be adapted to social-economic facts, and when this is the case they will facilitate population growth. But it is probable that the effect of this may be an acceleration of the collision with other peoples. To the extent that population is prepared, without impairing its productive efficiency, to diminish its standard of living, it can, for any given development of economic conditons, advance the population-increase. This, however, while it will postpone, cannot avoid the ultimate collision.

Even a very moderate rate of growth cannot indefinitely postpone trouble, and a people can save itself in this respect, only in so far as they can their efficiency to the highest possible limit, and also restrict themselves in regard to all unnecessary luxury. Whatever advances are made in science, and its applications in industry, and in food supply, they cannot of themselves postpone the ultimate resistance to further development, which must inevitably increase and increase until relieved by catastrophe or avoided by discipline. An attempt has recently been made to develop (1) a fairly complete mathematical theory of population, its characters and fluctuations. This is to be found in the Appendix to the 1st volume of the Australian Census of 1911. There it will be seen that an exhaustive study of all the phenomena contributory to the general result is not a light task: when economic factors are added its difficulty is increased. Such a study is, however, demanded if we are to have regard for the issues of the future in a disturbed world.

G. H. KNIBBS.

---

(1) By the author of this article.

Della misura statistica dell' abilità dei giocatori nelle corse al galoppo

Le corse dei cavalli, all' infuori degli scopi ai quali mirano, offrono anche pretesto a tutta una serie di scommesse, la rilevanza delle quali (1), mentre dà alle corse stesse una fisionomia particolare, rende interessante la determinazione statistica dell'abilità, maggiore o minore, della quale si armano i giocatori.

Mettiamo da parte le scommesse fatte secondo il sistema del cosidetto *boakmaker,* e limitiamoci al gioco, più razionale, fatto mediante il sistema del *totalizzatore.* Sul fondamento di questo trattasi di determinare l'abilità dei giocatori di diversi campi di corse. Che cosa deve, qui, intendersi per abilità? La maniera nella quale le puntate vengono fatte e si presentano di fronte ai risultati delle corse. Per cominciare diremo che il gioco è tanto più abile quanto maggiore è, rispetto alle puntate complessive, il numero delle puntate che vengono fatte sui cavalli vincenti, e viceversa.

Una prima misura dell'abilità dei giocatori può desumersi, appunto, dal rapporto tra le une e le altre puntate. Prendendo, ad

(1) A Milano, nel 1919, per ogni giornata di corse, le scommesse si sono aggirate tra le 500 mila lire ed il milione Ad Epsom (Londra), nel solo *Derby* — corso pochi mesi fa — si sono avute scommesse per parecchi milioni di lire.

es., le corse che si tengono a Roma e a Milano, si potrebbe avere uno specchio come il seguente, puramente esemplificativo:

Numero dei cavalli partecipanti alle singole corse	Numero delle corse		% delle puntate fatte sui cavalli vincenti (sul totale delle puntate).	
	Milano	Roma	Milano	Roma
2.	52	47	76	78
3.	134	81	58	55
4.	221	136	44	46
5.	219	114	34	37
....	....	....	....	....

La % servirebbe per dirci, grosso modo, dove si giochi meglio o peggio. Ma le corse essendo di molti cavalli, tien conto di vedere come vèngano fatte le puntate sul secondo arrivato, sul terzo, e via dicendo. E sempre sulla base del rapporto percentuale, e di questo specchietto, che è ugualmente esemplificativo, e che riguar-

Corsa a 3 cavalli

Ordine di arrivo	% delle puntate sul vincente	
	Milano	Roma
1°	53	46
2°	37	39
3°	10	15
	100	100

da le corse a 3 cavalli, si potrebbe concludere che a Milano si giochi meglio che a Roma.

Ora, quella dello specchio non sarebbe che la media aritmetica delle % delle puntate fatte, corsa per corsa, sul 1.o, sul 2.o e sul 3.o arrivato. Ma ecco che a dare un'idea della maniera nella quale si è scommesso in ciascuna corsa può servire la distribuzione percentuale delle puntate nelle singole corse.

Ma in ogni modo il metodo delle percentuali non è scevro di inconvenienti. Anzitutto, in taluni casi, riesce difficile, per non dire impossibile, determinare dove si sia giocato meglio. Si guardi, ad es., al seguente specchietto:

Corsa a 5 Cavalli

Ordine di arrivo	% delle puntate sui cavalli Milano	% delle puntate sui cavalli Roma
1°	20	30
2°	33	11
3°	22	50
4°	7	6
5°	18	3
	100	100

dal quale si stenta a percepire ciò che si ricerca, e che è ancora più difficilmente determinabile nelle corse con un maggior numero di cavalli.

E in secondo luogo, e in tutti gli altri casi, se pure si riesce a stabilire che in una città si giochi meglio che in un'altra, non si fissa la misura dal *quantum* si giochi meglio o peggio. Manca la misura sintetica dell'abilità ed è necessario ricercarla altrove che nelle percentuali.

Ma questa misura sintetica che andiamo ricercando, è opportuno che sia fondata sull'ordine effettivo e sull'ordine di arrivo così come esso è stato previsto in base alla distribuzione delle scommesse. Di queste due serie, la prima, quella dell'ordine di arrivo, è cio che effettivamente presenta interesse, al di sopra di ogni altra notizia relativa alla corsa sulla quale si potrebbe pensare di fondare i calcoli: ad es. il tempo impiegato dai cavalli a percorrere la distanza della corsa. Può darsi che un cavallo, che non sia arrivato primo in una corsa, abbia impiegato a compierla un tempo minore di quello impiegato da altro cavallo arrivato primo in altra corsa ma sulla medesima distanza. Significa ciò che quest'ultimo cavallo non si possa dire migliore del primo? Affatto; perchè può, ad es., avvenire che un fantino, che sappia di montare il cavallo migliore del gruppo, reputi indifferente sforzare l'andatura, quando già egli è certo di battere gli altri nella volata finale. Dunque l'elemento « tempo impiegato a compiere il percorso » così come gli altri possibili elementi di studio, non può presentare, per il caso delle scommesse, quell'interesse che è insito nell'ordine di arrivo. Per il quale basterebbe solo aggiungere che esso è l'argomento decisivo per fissare la vittoria dei cavalli e la vincita dei giocatori.

E quanto alla serie degli arrivi previsti, essa si può dedurre dalle quote di vincita. La quota di vincita, per ogni corsa e per il relativo cavallo vincente, è data dal rapporto tra le puntate fatte su questo e la massa complessiva delle puntate. Chiuse cioè, per ogni corsa, le scommesse (che vengono fatte sulla base della quota fissa di 5 lire) all'atto in cui i cavalli scendono in pista, si determina l'ammontare complessivo di esse (1). Questo, a corsa finita, viene diviso per l'ammontare delle scommesse poste sul vincente. Da ciò risulta la quota di vincita.

Sia, ad es., una corsa di 4 cavalli, nella quale il cavallo A abbia avuto 6000 puntate da 5 lire, B 8000, C 2000 e D 4000; sono complessivamente 20,000 puntate, corrispondenti ad una somma di 100 mila lire. Vincendo A, alle sue 6000 puntate viene proporzionalmente ripartita la massa delle scommesse. Così dal quoziente di 20000 per 6000 si ha 3,33, che è il numero delle quote da 5 lire che si restituiscono alle puntate vincenti. Chi ha scommesso 5 lire per A viene a ritirare 5 × 3,33 = 16,65 lire. Moltiplicando questa quota di vincita (nella quale è compresa la posta) per il numero delle puntate vincenti (6000), si perviene alle 100 mila lire che rappresentano l'ammontare delle scommesse.

Si rileva subito che, quando vince il cavallo sul quale è caduto il maggior numero di puntate, la quota di vincita è minima, essendo molto alto il divisore, cioè il numero delle puntate vincenti; e viceversa, la quota massima di vincita è data dal cavallo col minor numero di puntate.

(1) Badisi che noi, per non complicare la cosa, ci limitiamo a parlare delle scommesse fatte sui cavalli *vincenti*, e non parliamo di quelle relative ai cavalli cosidetti piazzati.

Per l'esempio fatto sopra si avrebbe:

Con la vittoria del cavallo a	Numero delle puntate b	Numero delle volte per cui deve essere moltiplicata la quota fissa di 5 lire (quoziente delle puntate complessive per le puntate fatte sopra ogni cavallo) c	Quota di vincita (compresa quella versata per la scommessa) spettante ad ogni puntata (prodotto della quota fissa di 5 lire per c) d
A	6000	3.33	16.65
B	8000	2.50	12.50
C	2000	10.00	50.00
D	4000	5.00	25.00
....	....	....	....

Si potrebbe pensare di mettere in relazione direttamente l'ordine effettivo degli arrivi con la serie delle quote di vincita. Varie considerazioni ci sembra però che rendano preferibile alla serie delle quote di vincita la serie degli arrivi previsti, che da questa si deduce. Non vi è corsa anzitutto nella quale molti giocatori, che pur apprezzano le *chances* del cavallo che poi sarà il vincente, e che sarebbero portati a scommettere su di esso, non finiscano con lo scommettere su altri cavalli, esclusivamente per tentare una vincita maggiore di quella che non possa permettere il cavallo favorito. Questa circostanza, mentre non riesce, con tutta verosimiglianza, a turbare l'ordine in cui le quote si succedono, corrispondente all'ordine degli arrivi previsti, turba manifestamente la intensità delle quote stesse. Si aggiunga che le quote del totalizzatore variano, in ordine al tempo, per il successivo inasprimento dei prelievi che lo Stato, a scopo fiscale, e la Società delle corse fanno sulla massa totale delle puntate.

Da ciò si conclude che nella ricerca che ci interessa occorre — è mestieri ripeterlo — porre in relazione l'ordine degli arrivi effettivi con quello degli arrivi previsti, derivante dall'ordine con cui le quote si succedono, dalla minore alla maggiore.

Per dare una misura sintetica di tale relazione risponde molto bene l'indice di cograduazione, proposto dal Gini (1). Si dice che

(1) v. C. Gini. *Indici di concordanza* in *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Anno 1915-16. Venezia, 1916.

esiste cograduazione massima o perfetta tra i due caratteri da esaminare (nel caso nostro la serie dell'ordine degli arrivi effettivi da una parte, e la serie degli arrivi sperati, determinati sulla base della distribuzione delle scommesse, dall'altra) quando disponendo l'uno in serie crescente o decrescente l'altro assume, nei valori corrispondenti, la forma di una serie ugualmente crescente o decrescente. Esiste controgradiazione perfetta quando all'ordine decrescente dell'uno corrisponde esattamente l'ordine crescente dell'altro carattere. Nella via di mezzo corrono le diverse intensità di cograduazione e di controgradiazione.

Si faccia il caso di una corsa di 5 cavalli (il numero dei termini della serie non ha importanza), dei quali il primo arrivato abbia dato una quota di vincita di 15 lire. Chi ha puntato sugli altri cavalli ha perduto, ma il secondo se fosse arrivato primo avrebbe dato 19 lire, il terzo 26, il quarto 27, il quinto, infine, 38 lire. Che cosa significa cio? Che in questa corsa vi è stato il massimo dell'abilità da parte dei giocatori, perchè esiste cograduazione tra le quote di vincita (la prima, effettiva, le rimanenti, eventuali) e l'ordine degli arrivi. Rovesciando la colonna delle quote e quella degli arrivi si avrebbe il massimo dell'abilità negativa, cioè della mancanza di abilità. In tal guisa, ad abilità corrisponde cograduazione, ed a mancanza di abilità controgradiazione.

E' fuori posto ripetere qui la maniera, per il resto abbastanza semplice, di calcolare l'indice di cograduazione. Basti dire che la cograduazione sta tra 0 (mancanza di cograduazione e di controgradiazione; cioè di abilità e d'inabilità) e + 1.00, mentre la controgradiazione sta tra 0 e — 1.00, cioè il massimo della mancanza di abilità (discordanza tra i due caratteri).

Giova avvertire che l'indice di cograduazione può presentare, corsa per corsa, un numero di valori tanto più limitato quanto più ristretto è il numero dei cavalli; ad es. nelle corse a 2 cavalli, l'indice deve sempre assumere uno dei suoi valori estremi (massimo di cograduazione o massimo di controgradiazione). Ma altrettanto non si può dire della media dei valori ottenuti nelle corse a due cavalli, la quale naturalmente può presentare valori intermedi tra quegli estremi ed è effettivamente rappresentativa del modo in cui si scommette nell'insieme delle corse a due cavalli.

Si deve anche accennare che, se spesso di tutte le scommesse fatte in un campo di corse si fa, corsa per corsa, un'unica massa, dalla quale si scende ad un'unica quota di vincita, talora, per il medesimo campo di corse, si tengono distinte le scommesse fatte al cosidetto *pesage* e quelle fatte al cosidetto prato. Onde, per i nostri calcoli, quando non ci siamo trovati di fronte alla quota unica, abbiamo calcolato la media aritmetica delle quote del *pesage* e del prato.

Ciò posto, facciamo seguire i risultati delle cograduazioni tra le due serie anzidette, relativamente a centinaia di corse al galoppo eseguite nel 1914, nel 1915 e nel primo semestre del 1919 a Roma e a Milano. Negli anni intermedii, nella prima di queste città, le corse tacquero quasi completamente, mentre di altri ippodromi non fu possibile esaminare, per la esiguità del relativo numero delle corse, che i risultati di quelle tenute nel 1914 a Varese, e nel 1914 e 1915 a Livorno.

Cominciamo col determinare l'abilità dei giocatori di questi diversi campi di corse, e vediamo senz'altro i dati riguardanti le corse al galoppo tenute a Roma nei periodi indicati; per le quali, dal calcolo dell'indice di cograduazione per ciascuna delle corse tenute nei diversi anni, ho ricavato l'indice medio per le corse col medesimo numero di cavalli:

Corse al galoppo di Roma

Numero dei cavalli	Numero delle corse			Indice medio di cograduazione (+) o di controgradazione (—)		
	1914	1915	1919	1914	1915	1919
2	22	14	15	+ 0.228	+ 0.143	+ 0.466
3	44	35	29	+ 0.556	+ 0.443	+ 0.380
4	61	49	29	+ 0.314	+ 0.428	+ 0.383
5	40	36	23	+ 0.322	+ 0.446	+ 0.373
6	28	19	18	+ 0.405	+ 0.359	+ 0.336
7	22	15	9	+ 0.337	+ 0.383	+ 0.369
8	9	12	4	+ 0.166	+ 0.351	+ 0.156
9	2	5		+ 0.537	+ 0.320	
10	1	2		+ 0.260	+ 0,322	
Totale	229	187	127	+ 0.363	+ 0.393	+ 0.375

Poichè in Roma è stato tenuto separato il gioco nel *pesage* e nel prato, così gli indici medii di cograduazione indicati in questo specchio sono la media degli indici relativi per il *pesage* e per il prato;

mentre nello specchio seguente, riguardante le corse di Milano, le quote separate per l'uno e per l'altro non si ebbero che solo nel 1914 (per il quale furono, quindi, determinate le medie dei due indici, del *pesage* e del prato). Ecco i dati per Milano:

Corse al galoppo di Milano

Numero dei cavalli	Numero delle corse			Indice medio di cograduazione (+) o di contrograduazione (—)		
	1914	1915	1919	1914	1915	1919
2	11	5	4	+ 0.454	± 0	+ 0.500
3	37	17	14	+ 0.371	+ 0 355	+ 0.571
4	73	19	24	+ 0.349	+ 0.421	+ 0.260
5	63	25	37	+ 0.313	+ 0.226	+ 0.371
6	55	36	24	+ 0 234	+ 0.168	+ 0.194
7	54	38	19	+ 0.266	+ 0.208	+ 0.412
8	39	17	19	+ 0.316	+ 0.447	+ 0.204
9	25	14	6	+ 0.221	+ 0.272	+ 0.383
10	13	11	6	+ 0.255	+ 0.374	+ 0.260
11	5	7	3	+ 0.363	+ 0.252	+ 0.222
12	8	2		+ 0.239	— 0.014	
13	1	1		+ 0.166	+ 0.333	
14	2			+ 0.234		
15	1			— 0.142		
16	1			+ 0 445		
Totale	388	192	156	+ 0.302	+ 0.286	+ 0.326

Nelle corse di Livorno per il 1914 si ebbero le due differenti quote del *pesage* e del prato, e l'indice qui sotto indicato è ugualmente la media degli indici medii; mentre per il 1915, e per le corse tenute a Varese nel 1914 si ebbe la quota unica; come risulta dal seguente specchio:

Corse al galoppo di Livorno e Varese

Numero dei cavalli	Livorno 1914		Livorno 1915		Varese 1914	
	Numero delle corse	Indice	Numero delle corse	Indice	Numero delle corse	Indice
2	—	—	—	—	1	— 1.000
3	6	+ 0.375	3	+ 0.500	3	+ 0.833
4	6	+ 0.062	4	+ 0.312	4	+ 0.375
5	5	+ 0.283	5	+ 0.433	7	+ 0.369
6	7	+ 0.229	4	+ 0.500	5	+ 0.310
7	2	+ 0.333	3	+ 0.222	7	+ 0.220
8	2	+ 0.250	—	—	3	+ 0.176
9	2	— 0.125	1	— 0.050	—	—
Totale	30	+ 0.219	20	+ 0.376	30	+ 0.306

Mentre, dunque, a Roma, negli anni indicati, la cograduazione — che abbiamo assunto a misura dell'abilità dei giocatori — si mantiene sempre tra i 350/1000 e i 400/1000, a Milano essa è notevolmente più bassa in ciascuno dei tre anni; per questi, d'altronde, i dati relativi sono molto vicini tra loro, andando da 285/1000 a 326/1000. E in ogni modo sembra che si possa conchiudere che a Roma si giochi alle corse con maggiore abilità che a Milano.

Quanto a Livorno, che per il 1914 ha un indice molto basso, mentre nel 1915 ha viceversa un indice molto alto, del quale non giova esagerare l'importanza a causa dell'esiguo numero delle corse che vi sono state tenute, sembrerebbe che appunto da questo ristretto numero delle corse si possa affermare che vi si giochi alle corse al galoppo ancora meno abilmente che altrove; mentre i pochi dati relativi alle corse di Varese permettono di affermare che la vicinanza del relativo indice (306/1000) con quello medio di Milano per i tre anni ricordati (304/1000) non è altro che la conseguenza del fatto che il pubblico delle corse di Varese (tenute di solito nell'estate), è formato in buona parte dai villeggianti milanesi.

Abbiamo detto che là dove il gioco non si svolge col sistema della quota unica di vincita, ivi le puntate, e quindi le quote di vincita, possono distribuirsi in maniera differente tra il *pesage* ed il prato è diversa può risultare la cograduazione (abilità) tra le due serie degli arrivi effettivi e dei previsti. Ora tenendo presente che il *pesage* è frequentato dalla parte più scelta del pubblico sportivo, mentre nel prato, per la tenuità della quota d'ingresso, si riversa di preferenza quello che si può chiamare il vero popolo, si potrebbe essere facilmente indotti nella convinzione che nel *pesage* si giochi meglio che nel prato, e che esista, quindi, notevole differenza tra l'abilità degli scommettitori di una parte (*pesage*) e quelli dell'altra (prato) del medesimo campo di corse. Ma questa differenza non si riscontra dai dati che abbiamo raccolto e tra i quali acquistano speciale importanza quelli di Roma, essendo che per le corse relative fu tenuto separato, per tutti i tre anni indicati, il gioco del *pesage* e quello pel prato.

Corse di Roma (Pesage *e prato*)

Numero dei cavalli	1914		1915		1919	
	Pesage	Prato	*Pesage*	Prato	*Pesage*	Prato
2	+ 0.184	+ 0.273	+ 0.143	+ 0.143	+ 0.466	+ 0.466
3	+ 0.511	+ 0.602	+ 0.443	+ 0.443	+ 0.380	+ 0.380
4	+ 0.328	+ 0.299	+ 0.428	+ 0.428	+ 0.362	+ 0.405
5	+ 0.358	+ 0.287	+ 0.476	+ 0.416	+ 0.384	+ 0.362
6	+ 0.416	+ 0.394	+ 0.356	+ 0.362	+ 0,339	+ 0.333
7	+ 0.352	+ 0.322	+ 0.377	+ 0.389	+ 0.369	+ 0.369
8	+ 0.208	+ 0.125	+ 0.380	+ 0.323	+ 0.156	+ 0.156
9	+ 0.525	+ 0.550	+ 0.310	+ 0.330	—	—
10	+ 0.240	+ 0.280	+ 0.500	+ 0.145	—	—
Totale	+ 0.364	+ 0.362	+ 0.402	+ 0.385	+ 0 373	+ 0.378

Mentre nei primi due anni si nota una leggerissima superiorità dei giocatori del *pesage*, per il 1919 questa superiorità passa, in misura ugualmente irrilevante, ai giocatori del prato. In sostanza, non esistendo profonde differenze si può dire che in una stessa città tutti — *gentlemans,* ufficiali, studenti, vetturini etc. — giochino all'incirca al medesimo modo cioè con le medesime tendenze e la medesima abilità, come sembrano confermare i dati di Milano per il 1914 (dai quali risulterebbe una piccola superiorità degli scommettitori del prato) e quelli di Varese per il 1914 (che non presentano alcuna differenza). Questa è invece rimarchevole per le corse di Livorno; come rilevasi dallo specchio seguente.

Corse al galoppo nell' anno 1914

Numero dei cavalli	Milano		Varese		Livorno	
	Pesage	Prato	*Pesage*	Prato	*Pesage*	Prato
2	+ 0.454	+ 0.454	— 1.000	— 1.000	—	—
3	+ 0.378	+ 0.364	+ 0.833	+ 0.833	+ 0.416	+ 0.333
4	+ 0.332	+ 0.366	+ 0.250	+ 0.500	+ 0.208	— 0.083
5	+ 0.323	+ 0.304	+ 0,405	+ 0.333	+ 0.333	+ 0.233
6	+ 0.226	+ 0.242	+ 0.333	+ 0.287	+ 0.206	+ 0.253
7	+ 0.256	+ 0.276	+ 0.250	+ 0.190	+ 0.416	+ 0.250
8	+ 0.214	+ 0.318	+ 0.145	+ 0.208	+ 0.281	+ 0.219
9	+ 0.222	+ 0.220	—	—	— 0.225	— 0.025
10	+ 0.169	+ 0.342	—	—	—	—
11	+ 0.366	+ 0.360	—	—	—	—
12	+ 0.215	+ 0.264	—	—	—	—
13	+ 0.143	+ 0.190	—	—	—	—
14	+ 0.224	+ 0.245	—	—	—	—
15	— 0.160	— 0.125	—	—	—	—
16	+ 0.453	+ 0.437	—	—	—	—
Totale	+ 0.295	+ 0.309	+ 0 306	+ 0 307	+ 0 260	+ 0 178

Ma per Livorno valga la considerazione fatta dianzi: che da un numero esiguo di corse è pericoloso trarre partito per parlare di maggiore o minore abilità.

GAETANO ZINGÀLI.

La fiscalité de Guerre

La présente étude a été écrite au printemps de 1918. On estimera peut-être que les évènements l'ont démentie puisque les nations alliées ont remporté la victoire sans s'être imposé les restrictions et les privations que nous jugions nécessaires. Mais cette objection n'a pas en réalité autant de valeur qu'en apparence. D'abord il faut ne pas regarder un seul camp: si les Empires Centraux ont pu, malgré la modicité relative de leurs ressources et le blocus qui, à partir de 1916, les a empèchés d'acheter au dehors, tenir pendant plus de quatre ans, c'est aux restrictions de toutes sortes imposées de bonne heure qu'ils l'ont dû. D'autre part, s'il est vrai que l'Entente a vaincu malgré ses gaspillages, c'est qu'elle disposait de ressources naturelles incomparablement supérieures à celles de ses ennemis: la prodigalité dont elle a fait preuve ne mérite point pour cela d'être donnée en exemple; bien des choses manquaient aux armées alliées à la fin des hostilités et, pour citer un exemple, on comptait plusieurs régiments français mal vètus: c'était la suite des consommations de drap excessives qu'avaient effectuées les civils. On peut se demander avec inquiétude ce qu'il fût advenu si l'Allemagne avait été capable de prolonger sa résistance au delà du 11 Novembre 1918.

D'autre part, si ces gaspillages n'ont pas empêché de gagner la guerre, ils ont singulièrement compromis la situation de l'après-guerre. Ils sont la cause directe de la crise que traversent aujourd'hui presque tous les anciens belligérants, notamment la France et plus encore l'Italie. Par suite les mesures fiscales propres à stimuler la production et à restreindre la consommation sont à l'ordre du jour maintenant comme pendant la guerre: peut-être trouvera-t-on de ce chef un intérêt d'actualité à cet article que nous reproduisons sans changements importants.

I.

Les écrivains qui ont examiné et critiqué les impôts adoptés dans les divers pays pendant la guerre mondiale, ont presque tous raisonné d'après le principe suivant, exprimé ou sous-entendu: le rôle de l'impôt est, en temps de guerre comme en temps de paix d'apporter de l'argent au Trésor Public; la seule différence entre les deux époques réside dans l'accroissement des besoins qui exigent des ressources plus grandes.

C'est ce principe même qui nous semble devoir être contesté.

Dans des circonstances normales, la fonction essentielle — certains disent même: la fonction exclusive — de l'impôt est de suffire aux dépenses publiques, car on admet généralement qu'il est préférable que l'Etat s'abstienne d'intervenir — sauf exception — dans la vie économique. On ne saurait raisonner de même en temps de guerre: la nation doit, avant tout, alimenter en denrées appropriées les consommations nouvelles et immenses des armées en campagne. Or, ces denrées ne viennent de l'étranger que pour une faible part. Elle sont, au début de la guerre, prélevées dans une large mesure sur les stocks de marchandises accumulés pendant la paix. Ces stocks ne constituent qu'une faible part du capital national, lequel consiste essentiellement en richesses que l'on ne peut consommer: terres, mines, usines, chemins de fer, maisons, et enfin créances sur l'étranger qui peuvent seulement payer par compensation ce que l'on importe. Il en résulte que les consommations de guerre sont alimentées principalement — et de plus en plus lorsque les hostilités se prolongent — par la production qui est effectuée au cours même de la guerre, comme nous avons essayé de le montrer dans la *Revue d'Economie Politique* de Septembre-Décembre 1917 (1).

---

(1) *Consommations de guerre, perspectives d'avenir et nécessités présentes* (p. 381-425) — Cette étude est un essai d'interprétation des conditions économiques de la guerre, de ses conséquences économiques probables et des mesures qu'elle rend nécessaires: une partie seulement en est consacrée au problème fiscal. — La même interprétation a été formulée en même temps par M. Jèze, mais il en a déduit des conclusions qu'elle ne

Pour que les denrées soient produites et pour qu'elles soient réservées à l'armée, il faut que l'orientation de la vie économique — production, circulation, consommation — soit modifiée tout entière et très vite. Il appartient au Gouvernement de provoquer cette transformation. Les impôts nouveaux sont un des procédés les plus efficaces qu'il puisse employer à cette fin.

Transformer l'économie du temps de paix en économie de guerre, telle est l'une des fonctions nouvelles de la fiscalité en temps de guerre.

Et cette fonction exceptionnelle importe plus que la fonction normale de l'impôt. Il est pour celà deux raisons.

Le probléme économique: comment produire les marchandises nécessaires? est primordial. S'il n'est pas résolu d'abord, le problème financier: comment payer les marchandises? ne se posera même pas. Cette subordination du problème financier au probléme économique n'apparaît pas en temps de paix, parce qu'alors les consommations publiques sont relativement faibles et varient peu d'une année à l'autre: la production est donc organisée de maniére à les satisfaire sans peine. Mais en guerre ces consommations prennent subitement une importance formidable: par ce motif elles exigent, pour être alimentées, la transformation complète de la vie économique dont il a été parlé plus haut.

D'autre part les Etats modernes ont, pour couvrir leurs depenses de guerre d'autres ressources que l'impôt. Ils peuvent emprunter ou émettre du papier monnaie: le premier procédé impose aux budgets à venir le service des emprunts; le second est encore plus critiqué. L'impôt est donc, là où il est possible, le meilleur procédé, mais il n'est pas le procédé unique. Au contraire sans une production intense et orientée vers les besoins militaires on ne peut fournir aux troupes tous les vivres, toutes les armes, toutes les munitions qui leur sont nécessaires. Le conflit mon-

---

nous semble pas comporter (*Revue de Science et de Législation financières* Octobre 1917 notamment p 564 et l'*Action Nationale* Décembre 1917)

M. PIERRE GUEBHARD a fait le 5 Octobre 1918 à la *Société d'Economie Politique* un exposé sur « L'aspect économique des dépenses de guerre », qui a été publié dans le *Journal des Economistes* du 15 Octobre 1918 (p. 111-120). M. CHLEPNER a donné dans la *Revue d'Economie Politique* (Janvier 1919 p 1-12 un article portant le même titre : *L'aspect économique des dépenses de guerre.* Ces deux travaux développent des idées absolument identiques à celles que l'on peut trouver dans notre étude, qu'ils n'ont d'ailleurs point citée. Ils n'ont pas envisagé, l'un ni l'autre, les conséquences que ces idées comportent au point de vue de la fiscalité et qui seront seules traitées ici.

dial vient de montrer à quel point la solution du problème économique est plus difficile que celle du problème financier: aucun des belligérants n'a jamais manqué d'argent; au contraire tous ont à certains moments souffert d'une crise des munitions et il semble bien que la défaite de l'Allemagne soit dûe en partie au fait que dans l'été de 1918 son matériel n'égalait plus celui des Alliés; et c'est là une question de fabrications de guerre.

Le rôle de la fiscalité dans l'organisation de l'économie de guerre a été presque universellement méconnu. M. Jéze y a cependant songé pour demander que la France imitat l'exemple donné par l'Angleterre et les Etats-Unis qui ont eu pour principe de couvrir la plus grande part possible des dèpenses de la guerre par des impôts dont la majorité fussent dïrects et fortement progressifs. A la plupart des économistes il n'y a pas lieu de demander si les impôts de guerre qu'ils admettent sont propres à transformer l'économie de paix en économie de guerre: c'est là une question qu'ils n'ont pas même aperçue. A M. Jéze au contraire on peut et on doit demander si le programme fiscal preconisé répond bien à un but intéressant l'économie nationale ou si les préoccupations économiques ont été dominées par des considérations politiques, qui dans la présente étude ne seront d'ailleurs ni approuvées ni improuvées: notre travail est consacré exclusivement à la *science* économique et les *docrines* politico-economiques n'y sont examinées que dans la mesure où elles empêchent de voir les faits et d'en déduire les conséquences.

II.

Aux considérations économiques succèdent bien vite sous la plume de M. Jèze d'autres idées directrices dont la première seule a trait aux conditions particulières du temps de guerre: « Il est infiniment périlleux pour la paix publique et pour la production nationale, que les classes peu fortunées soient écrasées par ces charges [résultant de la hausse des prix] au moment même ou elles ont le spectacle des dépenses de luxe effectuées par la minorité que la guerre enrichit. Il suffit d'un trés petit nombre d' exemples de ce genre pour démoraliser un pays et provoquer des agitations et des troubles dans la rue » *(L'Action nationale* déc. 1917 p. p. 348-349).

Eviter de tels conflits est en effet un but qu'il serait trés sage de se proposer s'il pouvait être atteint. Seulement il ne peut pas l'être. Les demi-mesures ne peuvent servir de rien puisqu' « il suffit d'un très petit nombre d'exemples de ce genre pour démoraliser un pays » et, si l'on veut en venir aux décisions extrêmes, comment empêcher les nouveaux riches de dépenser? Où comment empêcher qu'il y ait de nouveaux riches? Par l'impôt sur les bénéfices de guerre? Mais il faudrait qu'il fût de 100 %, si l'on voulait que personne ne fût plus riche qu'en temps de paix et à ce taux il découragerait les efforts au moment même où ils doivent être tendus à l'extrême.

Voudrait-on, pour éviter ce remède pire que le mal, épargner aux masses populaires toutes privations en temps de guerre? Ç'a été la prétention du gouvernement Français jusqu'à la fin de 1916, jusqu'à ce que la situation l'ait forcé à y renoncer, accident que l'on pouvait prévoir à l'avance sans pour cela faire preuve d'une perspicacité extrême, car il était assez évident que l'on ne peut consommer comme en temps de paix lorsqu'on produit moins et qu'il faut d'abord alimenter l'armée.

D'ailleurs les lourds impôts sur les bénéfices de guerre et sur les gros revenus ont été appliqués en Angleterre et n'ont point empêché le développement chez les ouvriers anglais d'un mécontentement que l'on ne trouve pas aussi intense en France. N'est ce point la preuve que les gouvernants peuvent bien moins qu'on ne le croit sur le sentiment public dont ils se sont, en France et dans la guerre actuelle, beaucoup plus préoccupés qu'il n'était nécessaire, car le danger de troubles populaires, était infiniment moindre qu'ils ne le croyaient? Il est donc inutile, pour ne pas dire plus, de chercher à développer dans notre gouvernement des craintes qui furent déja très exagérées.

Cette préoccupation de la paix publique est chez M. Jèze associée, ou plutôt subordonnée à une autre préoccupation, celle d'assurer la justice des nouveaux impôts. Ce terme de justice est un grand mot et qui fait impression sur les esprits, mais on doit remarquer qu'il change de sens selon l'auteur qui l'emploie. Ainsi l'impôt juste est, au dire des démocrates, l'impôt progressif et, au dire des conservateurs, l'impôt proportionnel. Il serait aisé de multiplier les exemples analogues et de montrer que chacun appelle juste l'impôt qui se conforme à ses préférences politiques, c'est dire ordinairement l'impôt qui laisse indemne soit l'auteur même de l'appréciation, soit la classe sociale à laquelle il s'intéresse.

Ceci posé, quel rôle peuvent jouer en matière fiscale les préoccupations de « justice »? L'impôt doit avant tout remplir ses fonctions essentielles qui sont en temps de guerre de modifier l'orientation économique et en tous temps d'apporter de l'argent au Trésor sans nuire à la production nationale. Les taxes qui répondent à ces conditions peuvent seules être raisonnablement adoptées, mais si toutes ne sont pas nécessaires, le parti au pouvoir peut établir seulement celles qu'il estime « justes ».

Inversement en temps de guerre, puisqu'il faut trasformer trés vite toute la vie économique, on doit voter sans distinction tous les impôts possibles et laisser de côté les considérations de « justice » qui sont, au vrai, des préoccupations de parti. C'est à cette règle que nous nous conformerons et nous tenterons de montrer dans les pages suivantes que le programme financier dit démocratique — quoiqu'on en pense pour le temps de paix — est, comme tout programme de parti, incapable de répondre complétement aux nécessités du temps de guerre. Si nous discutons le programme de M. Jèze et non pas un autre programme d'une autre opinion, c'est qu'il se réclame ici d'un principe économique qui est le nôtre et dont il nous paraît faire une fausse application.

III.

Faut-il « concentrer l'effort fiscal sur un petit nombre d'impôts bien choisis et ne pas créer une poussière d'impôts vexatoires et peu productifs. » (*Action Nationale,* déc. 1917 p. 366.) Ce principe peut être soutenu lorsqu'on se propose uniquement de fournir des ressources à l'Etat, encore que bien des auteurs affirment, non sans quelque apparence de raison, que des impôts peu nombreux seront nécessairement trés lourds, partant plus vexatoires et d'une perception plus difficile que des impôts plus nombreux et de taux plus modéré. Mais puisqu'il s'agit de transformer toute l'économie de paix en économie de guerre, on doit établir « une poussière d'impôts » et ne pas s'inquièter qu'ils soient « peu productifs », voire même « vexatoires » à un certain degré, pourvu qu'ils atteignent leur but.

D'autre part cet exclusivisme financier de M. Jèze le conduit à proposer pour les rares impôts qu'il admet des taux, nous ne dirons pas injustes — cette considération n'importe pas — mais inapplicables: 15 à 20 % du revenu des valeurs mobilières; « relever *considérablement* le taux de l'impôt complémentaire sur le revenu..... jusqu'à 50 % ou plus pour les gros revenus. »

(*Action Nationale* dec. 1917 p. 364.) Ainsi le total des impôts cédulaires et complémentaire pourrait atteindre les trois quarts du revenu. L'income-tax anglais, qui réunit les deux sortes d'impôts, n'a pas été portée à ce taux, bien qu'elle fonctionne sans interruption depuis soixante-dix ans, que les contribuables y soient habitués, qu'ils aient donc moins de tentations et de possibilités de s'y soustraire par fraude. En France, au contraire, l'impôt sur le revenu a été établi récemment, il soulève beaucoup de défiances, si bien que beaucoup de richesses lui échappent par dissimulation. Pour en faire un impôt vraiment général, qui atteigne également tous les contribuables et non pas seulement ceux qui sont honnêtes, il faut donner à l'administration des finances les pouvoirs de contrôle les plus étendus, il faut frapper partout le revenu réel et non pas un revenu calculé à forfait, c'est à dire presque toujours trop bas, mais il faut aussi obtenir la collaboration des imposés en évitant de les inquiéter trop tôt par le relèvement du taux de l'imposition.

Il est cependant nécessaire, dira-t-on que l'impôt complémentaire sur le revenu donne beaucoup plus que les quarante millions produits en 1916. D'accord, mais pour obtenir en période normale de larges recettes d'un impôt entré dans les habitudes, il faut justement demander très peu à cet impôt lorqu'on veut l'« acclimater ».

On doit, en matière de finances publiques, raisonner non pas sur le moment présent mais sur une longue période, cinquante années par exemple, parmi lesquelles se trouveront, dans le système adopté par le Parlement, une année à taux modéré et quarante-neuf à taux relevé, avec des fraudes fiscales toujours importantes. Le système inverse eût comporté cinq années à taux modéré et quarante-cinq à taux relevé: le produit aurait été évidemment moindre pendant les cinq premières années mais plus fort pendant les quarante-cinq suivantes, grâce à la rareté des dissimulations. Au total l'Etat y aurait certainement gagné. Au nom d'une bonne *technique fiscale*, il faut donc, non pas réclamer une nouvelle augmentation de l'impôt sur le revenu, mais juger prématurées celles qui ont été effectuées depuis la fin de 1916.

IV.

La fiscalité de guerre c'est, nous l'avons vu, l'ensemble des impôts par lesquels l'Etat peut et doit agir sur la vie économique en temps de guerre. Il ne saurait être question d'énumérer ces impôts, très nombreux et très variés; nul ne peut même les concevoir tous en un moment donné, car chacun d'eux doit être créé au moment où les circonstances le rendent nécessaire. On ne trouvera donc ici que des exemples destinés à préciser notre pensée.

1°. Une production réduite devant alimenter avant tout les consommations de guerre, il faut réduire les consommations habituelles. Celles des riches ou bien celles de tous? On préfère ordinairement la première alternative parcequ'elle provoque moins de souffrances et fait moins de mécontents. M. Jèze lui-même, s'il se prononce pour la seconde, le fait avec tant de restrictions que, visiblement, il en arrive à ne presque pas souhaiter d'économies populaires. Il va même plus loin et ajoute: « Il est *légitime* de la part des classes ouvrières de profiter d'un accroissement de richesse pour dépenser davantage; mais c'est *uniquement dans la mesure où cet accroissement de dépense a pour objet et pour effet de porter le genre de vie des ouvriers à ce qui est nécessaire pour que le travailleur ne vive pas seulement une vie de brute, pour qu'il mène une vie d'être civilisé.* » (1)

Il est des niveaux de vie qui doivent être relevés même en temps de guerre: ce sont ceux qui ne permettaient pas l'entretien des forces par une alimentation suffisante, et, pour prendre un exemple, la loi sur le minimum de salaire dans l'industrie à domicile, ne pouvait souffrir d'ajournement. Mais M. Jèze va beaucoup plus loin: il souhaite pour tous l'accés à « une vie d'être civilisé », notion vague et qui est susceptible d'une extension indéfinie. Il veut qu'une partie des ouvriers consomme un peu moins qu'en temps de paix; il admet que d'autres consomment plus: cela revient à dire que dans l'ensemble il ne demande à la classe ouvrière aucune réduction de sa consommation. Pour justifier une telle conception, il faudrait que les consommations de guerre fussent si médiocres qu'on put les alimenter avec les seules économies des riches: or il n'en est rien.

Il est trois sortes de consommations qu'il faut réduire pour alimenter la guerre au moyen d'une production nationale qu'elle diminue:

a) Consommation d'objets directement nécessaires à l'armée, Ce ne sont point des objets de luxe mais d'usage courant: pain, viande, drap et autres choses dont un riche ne consomme guère plus qu'un pauvre et dont les riches, si peu nombreux, consom-

---

(1) *Revue de Science et de Législation financières*, 1917, p. 570.

ment beaucoup moins au total que les classes pauvres. Ainsi les économies les plus immédiatement utiles doivent être faites par toutes les classes.

b) Consommation d'objets inutiles à l'armée mais dont la production exige un travail qui devrait être appliqué aux fabrications de guerre.

c) Consommation d'objets importés dont l'achat à l'étranger grève notre change.

Dans ces deux cas la part des achats des riches et des économies à leur demander est plus forte mais non pas du tout prépondérante. Pour le penser il faudrait croire le peuple français réduit au strict nécessaire, ce qui n'est heureusement point le cas. Certes les riches doivent faire les premières et les plus grosses économies, mais les restrictions de consommation que peuvent s'imposer les classes populaires, si médiocres soient-elles individuellement, constitueront par leur masse la part de beaucoup la plus importante dans l'épargne de guerre.

Si donc, pour employer les expressions mêmes de M. Jèze « *il faut contraindre les individus à réduire leurs consommations* » (*Action Nationale* décembre 1917, p. 345), les impôts de guerre ne doivent pas frapper uniquement ni même essentiellement une seule classe sociale. C'est ce qu'affirmait la résolution votée le 16 Juillet 1915 par une assemblée de commerçants et de banquiers de la Cité de Londres. résolution reproduite avec éloge par M. Jèze : « des impôts nouveaux doivent être immédiatement établis sur toutes les classes du peuple ».

2.° Il faut donc non seulement des impôts directs pesant sur les riches mais aussi des impôts de consommation portant sur les masses; et fixer par avance une proportion entre les uns et les autres, c'est faire preuve d'esprit de systéme, non d'esprit scientifique ni de souci des realités.

Le défaut des impôts de consommation a été signalé, il est vrai, des longtemps: pour être productifs ils doivent être établis sur des objets de consommation courante et dont le pauvre fait usage à peu près autant que le riche. Ils ne se proportionnent donc pas aux ressources et prennent une plus forte part des petits revenus que des grands. Faut-il pour cela les supprimer? Non point, car on ne peut s'en passer, mais il faut compenser leur improportionnalité et rétablir l'équilibre entre les contribuables par des impôts directs progressifs: l'ensemble des impôts payés par chacun sera ainsi proportionnel à ses facultés.

Il résulte des ces considérations générales que les impôts de consommation ne doivent fournir qu'une partie des ressources demandées aux contribuables pour la guerre, mais cette partie ne doit pas être arbitrairement restreinte, et cela pour deux raisons. Raison fiscale; comme l'impôt porte sur des quantités de marchandises (hectolitres de vin ou d'alcool par exemple), il doit être relevé avec la hausse des prix; sinon il ne prendra qu'une part de plus en plus réduite de la valeur des marchandises.

Raison économique, de beaucoup la plus importante: La fiscalité du temps de guerre doit avant tout obliger les particuliers à réduire leurs consommations. Or à ce point de vue l'impôt de consommation présente une supériorité sur l'impôt direct. L'impôt direct réduit l'ensemble des ressources de ceux qu'il frappe mais les laisse libres de restreindre les consommations qu'il leur plaira. Au contraire par l'impôt de consommation l'Etat peut réduire surtout la demande des marchandises qu'il estime devoir être particulièrement ménagées. Veut-on par exemple réserver à l'armée une large part du vin produit en France en réduisant la consommation civile? Imposer le vin et relever ainsi son prix de vente produira sûrement ce résultat; augmenter l'impôt direct diminuera peut-être toutes les consommations excepté celle du vin.

Dans une fiscalité du temps de guerre, inspirée par les nécessités économiques de la guerre, les impôts de consommation doivent donc tenir une place assez large. Il est vrai que l'opinion contraire peut être appuyée de l'exemple de l'Angleterre et des Etats-Unis. Mais il s'agit de déterminer quels impôts conviennent le mieux au temps de guerre; or en quoi le fait qu'un impôt a été adopté ici ou là peut-il prouver qu'il doive produire les résultats économiques que l'on souhaite? Pour répondre par l'affirmative, il faudrait avoir montré, au préalable, que les politiciens anglais ou américains possèdent au plus haut degré le don de prévoir les répercussions économiques des impôts nouveaux. N'est-il pas plus vraisemblable que ces politiciens aient simplement suivi leur ligne de conduite ancienne, en développant la taxation directe, comme on le faisait aux Etats-Unis depuis l'avénement du Président Wilson et en Angleterre depuis trois quarts de siècle? M. Jèze pourrait sans doute accepter cette explication, car il a marqué lui-même combien il est difficile en tous pays « d'obtenir, *du Parlement*, un bouleversement des programmes politiques adoptés par lui »: Il résulte de cette difficulté que si un « bouleversement » se produit dans la réalité, tel que la guerre mondiale, les conceptions des partis parlementaires se trouvent en retard sur les faits et que la science sociale en général ou la science des finances en particulier n'ont pas à tenir compte de ces conceptions.

3.° Que penser du reproche fait aux impôts de consommation et à l'impôt sur les dépenses de tendre à provoquer une nouvelle hausse des prix? Cette idée se rattache à une conception plus générale: « enrayer la hausse des prix » est un « devoir capital des gouvernants » (*Action Nationale*, dècembre 1917, p. 345). Une analyse approfondie des conditions économiques conduirait, nous le croyons, à modifier dans une assez large mesure cette conception.

La hausse des prix est la conséquence de la disproportion qui existe entre la production et la demande. Au point de vue économique c'est cette disproportion qui est un mal et non pas la hausse, de même que pour le malade c'est l'anémie elle-même qui est grave et non pas la pâleur qui en résulte. Il est vrai qu'en augmentant la production ou en diminuant la demande, chose essentielle, on arrêtera la hausse des prix, chose secondaire, il y a cependant un grand danger à concentrer son attention sur le symptôme, c'est qu'on en arrive souvent à croire qu'il suffit de le faire disparaître pour guérir le mal et on procède, pour continuer la comparaison de tout à l'heure, comme un anémique qui, pour tous soins, se bornerait à se farder les joues. Un systéme de ce genre a été pratiqué en France: il a nom la taxation des prix et on en sait les résultats. C'est à propos du blé qu'ils ont le plus nettement apparu. On en avait fixé le prix au dessous des cours pratiqués sur le marché mondial: comme il fallait cependant importer du blé, l'Etat en achetait cher à l'étranger pour le revenndre bon marché à l'intérieur. Premier résultat: lourde perte pour le Trésor. Comme le blé coûtait moins cher que l'avoine, on le donnait aux chevaux et on le gaspillait de toutes manières: deuxième résultat. Enfin le bas prix décourageait les cultivateurs de semer du blé et contribuait a faire réduire les emblavements. Troisième résultat: diminution de la production. N'eut il pas mieux valu se résigner à la cherté du blé et à un relèvement du prix du pain, qui serait resté modéré à la condition de diminuer le nombre des boulangers et leur bénéfice par kilogramme de pain?

On voit par cet exemple que la hausse des prix est fort loin de constituer pour l'économie nationale, le mal par excellence. Bien au contraire l'histoire du XIX^{me} siècle montre que, s'il y a eu plusieurs fois hausse des prix sans prospérité, en revanche il n'y a jamais eu développement économique rapide et général sans hausse des prix. Dans ce siècle en effet on distingue quatre grandes périodes, dont les dates initiales et terminales peuvent être fixées approximativement de la manière suivante: 1815-53, 1853-75, 1875-97, et 1897-1914. Dans la première et la troisième les prix s'abaissent et le progrès économique est lent; dans la seconde et la quatrième les prix s'élèvent et le progrès économique est rapide. Pendant la guerre actuelle, la haussse des prix a eu l'inconvénient d'enfler les dépenses publiques mais aussi l'avantage de faciliter singulièrement la transformation de l'économie de paix en économie de guerre, comme nous l'avons montré dans notre étude sur les *Consommations de Guerre*. C'est aussi grâce à la hausse que l'épargne française est actuellement, à tout le moins le double de ce qu'elle était pendant la paix. (1)

Il ne faut pas exagerer non plus les conséquences sociales de la hausse des prix ni tenir comme fait M. Jèze. (*Action Nationale* decembre 1917 p. 347 et 348) les « petits paysans » pour des victimes de la hausse, car les petits propriétaires, les fermiers, et les métayers vendent beaucoup plus qu'ils n'achètent et bénéficient de la hausse bien loin d'en souffrir. La plupart des familles ouvrières françaises se trouvent, tout compensé, dans une situation égale ou supérieure à celle qu'elles avaient avant la guerre. Sauf des exceptions individuelles, les personnes qui souffrent de la situation économique présente sont toutes réunies dans deux classes: les rentiers, qui, à juste titre, ne préoccupent pas particulièrement les partis democratiques, et les fonctionnaires: doit-on pour ces deux catégories de personnes provoquer la grave crise économique qui résulterait d'un abaissement brusque des prix par la diminution subite de la circulation fiduciaire?

4°. Réduire la consommation n'est qu'une part de la tâche dévolue à la fiscalité de guerre: il faut aussi développer et transformer la production. Les différentes parties de ce programme ne pourraient être traitées que par des spécialistes. Il faut cependant des exemples: nous avons dans la *Revue d'Economie Politique* donné celui de la boulangerie, nous donnerons ici celui du charbon.

---

(1) Nous avons consacré à *L'Accroissement de l'épargue française pendant la guerre* un article dans la *Revue d'Economie Politique* (Juillet 1917 p. 277-284). Une partie des souscriptions aux emprunts ne provient pas de l'épargne, mais quelles que soient les déductions à effectuer de ce chef-et nous les avons calculées très haut, probablement trop haut — il reste 8 milliards d'épargue annuelle en temps de guerre, quand pour le temps de paix, al plus forte évaluation ne dépassait pas 4 milliards 300 millions.

La hausse fantastique du prix du charbon a procuré aux compagnies minières des bénéfices anormaux. Pour les dissimuler, certaines d'entre elles ont, à ce que l'on prétend, exploité systématiquement les gisements les moins productifs de façon à réserver pour le temps des bas prix les filons les plus riches: il y aurait eu de ce chef un empêchement à porter la production houillère à la limite du possible, comme l'exigeait l'intérêt national. Cependant les bénéfices ont été si grands qu'ils excitèrent l'envie des mineurs et justifièrent leurs demandes de relèvement de salaires: or l'augmentation de la rémunération des ouvriers mineurs a toujours eu pour effet de réduire la production par tête, comme l'a montré M. SIMIAND dans son beau livre sur *Le Salaire des ouvriers mineurs.*

La vraie solution conforme à l'intérêt national n'eût pas consisté dans un abaissement du prix du charbon ni dans une péréquation dont l'expérience a montré l'impossibilité. Mais il aurait fallu, en laissant fixer le prix du charbon par l'importation étrangère, réserver au Trésor pour la durée de la guerre le surcroît de bénéfices procuré à la production nationale par la hausse du prix. L'Etat aurait monopolisé le commerce de la houille en l'achetant aux mines trés peu-au dessus du prix de revient normal, non majoré par l'exploitation des mauvaises veines. Les compagnies, pour réaliser des bénéfices simplement médiocres, auraient dû forcer leur production. Les ouvriers, auxquels elles n'auraient pu accorder grand relèvement de salaires, se seraient résignés aux « longues coupes » pour subvenir à leurs dépenses augmentées par la hausse générale des prix: nouvelle cause d'accroissement de l'extraction. Enfin le Trésor aurait perçu plusieurs centaines de millions (1).

CONCLUSION

Le caractère que nous nous sommes efforcé de donner à cette étude comporte une conclusion nettement différente de celles qui terminent la plupart des articles relatifs à la fiscalité de guerre. De ces écrits, les uns se terminent par le rappel au respect de la propriété et les autres par l'interrogation de M. JÈZE: « notre

(1) La crise actuelle du charbon suffit à critiquer la politique opposée qu'ont suivie les gouvernements. (1920).

pays est-il, oui ou non une démocratie? » Nous n'avons pas à poser la question dans ces termes ni même à nous demander ce qu'ils signifient exactement et si, par exemple, le programme que l'on appelle démocratique n'est pas teinté de socialisme — ce serait une discussion politique — mais nous devons noter que tous ces auteurs terminent par des formules purement politiques, donc tout à fait étrangères aux considérations sur les nécessités économiques du temps de guerre, les seules dont nous ayons voulu tenir compte. Il y a donc opposition nécessaire entre tous les programmes fiscaux, quelle qu'en soit la couleur politique, et celui que nous avons tenté d'esquisser en nous inspirant de l'esprit de guerre et uniquement de l'esprit de guerre.

JEAN BOURDON.

Sulle applicazioni del calcolo delle probabilità alla fisica molecolare

1. In queste poche pagine mi propongo di dare un cenno delle applicazioni del calcolo della probabilità alla fisica molecolare. Non è possibile, dato lo scopo di questo scritto e lo spazio ad esso concesso, accennare a tutte le questioni che rientrano nell' argomento. Mi limiterò a dire quel tanto che basti perchè chi è lontano da questo genere di studi possa meglio apprezzare un campo di ricerche assai promettenti. A rendere più agevole la lettura di questo scritto, o almeno a renderne più agevole la comprensione, ho creduto conveniente di non limitarmi a una semplice rassegna di risultati : ho accennato anche alle dimostrazioni di alcuni risultati che interessava mettere in evidenza (1).

---

(1) Nella redazione del presente scritto ho tenuto presenti le opere seguenti :

L. Boltzmann — *Leçons sur la théorie des gaz* (Gauthier-Villars, Paris 1902-1905).

J H Jeans — *The dynamical theory of gases* (University-Press, Cambridge 1916).

J. Perrin — *Les atomes* (Nouvelle collection scientifique, Felix Alcan, 1914).

M. P. Langevin — *La physique du discontinu* (Les progrés de la physique-moleculaire, Gauthier-Villars, Paris 1914).

E. Borel — *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz* (Annales scientifiques de l' Ecole Normale Sup s.^{e} 3, vol. 23, 1906).

P. e T. Ehrenfest — *Mécanique statistique* exposé par E. Borel (Encyclopédie des Sciences mathématiques, tome IV, vol. I, 1915).

G Castelnuovo — *Calcolo delle probabilità* (Albrighi e Segati, Milano, Roma, Napoli 1919).

2. *Leggi di Boltzmann-Gibbs.* — Le molecole di un gas sono in moto incessante. Si tratta di escogitare degli schemi che servano da ipotesi di lavoro per dar ragione del moto accennato.

A tale scopo, considerando un gas racchiuso in un recipiente, assimileremo una molecola (che può essere composta da uno o più atomi in moto) a un sistema materiale in moto. Se n sono le molecole del recipiente considereremo n sistemi materiali in moto.

Per semplicità ci limiteremo a considerare il caso che tra le molecole non vi siano (o siano trascurabili) le forze di coesione. Per tanto ogni sistema da noi considerato (corrispondente a una molecola) avrà, in ogni istante, una *energia totale* E che non dipenderà dalla configurazione e dallo stato di movimento degli altri sistemi materiali considerati (cioè delle altre molecole). L' energia totale E di una molecola, in un determinato istante, dipenderà bensì dal posto che occupa, dalla configurazione degli atomi che la compongono e dal suo stato di movimento. Essa, in un dato istante, risulta dalla somma dell' energia cinetica, della energia potenziale dovuta alle forze interne della molecola e dell' energia potenziale dovuta a forze esterne (come ad es. la gravità) la quale dipende dalla posizione del centro di gravità della molecola stessa.

Possiamo supporre che una molecola (composta di atomi) rappresenti un sistema in moto con r *gradi di libertà,* cioè la sua *posizione* e *la sua configurazione*, in ogni istante, sono determinate da r parametri (coordinate lagrangiane del sistema)

$$q_1,\ q_2, \ldots, q_r \tag{1}$$

mentre il suo *stato di movimento* sarà determinato, in ogni istante, da altri r parametri, *componenti dell' impulso del sistema*, che, come è noto, sono *funzioni lineari* delle derivate delle (1) rispetto al tempo espressi da

$$p_u = \frac{dE}{dq'_u},\ u = 1, 2, \ldots r \tag{2}$$

in cui $q'_u = \dfrac{dq_u}{dt}$ e in cui E, energia totale della molecola, è, come è noto, una funzione delle (1), delle derivate delle (1) rispetto al tempo e della distribuzione delle masse che compongono gli atomi della molecola che si considera.

La funzione E, per una data molecola, cambia col tempo; non si può scrivere che E è una costante nel tempo, non si può cioè applicare il principio della conservazione della energia a una sola molecola perchè essa non è isolata, ma si trova insieme con altre molecole con le quali scambia e altera la sua energia E che può considerarsi come costante solo tra due urti successivi.

Consideriamo ora le n molecole come *un unico sistema* materiale in moto. Se in un determinato istante sono $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *le energie totali di ciascuna molecola*, l' energia totale del sistema sarà

$$(3) \qquad H = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$$

ma questa volta possiamo supporre che *H sia costante attraverso il tempo*: le n molecole scambiano le energie tra di loro e, per ipotesi, non alterano il valore di H, o l' alterano in modo trascurabile, gli urti contro le pareti del recipiente.

Noi consideriamo l' urto come *istantaneo*: di due molecole che si urtano bisogna parlare delle coordinate p e q *prima* dell' urto e *dopo* dell' urto.

Ciò premesso la configurazione e lo stato di movimento delle n molecole sono, *in ogni istante*, rappresentate da $R = nr$ coordinate generali

$$(4) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_R$$

e da $R = nr$ componenti d' impulso del sistema di n molecole, funzioni lineari delle derivate q'_u delle (4) rispetto al tempo, date da

$$(5) \qquad p_u = \frac{dH}{dq'_u}, \; u = 1, 2, \ldots, R.$$

in cui

$$(6) \qquad H = \text{costante}$$

attraverso il tempo. Per le ipotesi fatte, la posizione, la configurazione e lo stato di movimento di una *singola molecola* dell' intero sistema restano sempre espressi da r coordinate generali e da r componenti di impulso, più chiaramente le $2R$ coordinate, che rappresentano la configurazione e lo stato di movimento del sistema di n molecole, si dividono in n gruppi di $2\,r$ coordinate: ciascun gruppo di coordinate rappresentando, in ogni istante, la posizione, la configurazione e lo stato di movimento di una molecola che restano indipendenti dalle posizioni, dalle configurazioni e dagli stati di movimento delle altre molecole — s' intende sino a quando non intervenga un urto.

Possiamo dire, per comodità di linguaggio, che, in un determinato istante, la configurazione e lo stato di movimento del sistema di n molecole, determinati dalle coordinate (4) e (5), sono rappresentati da un punto in uno spazio a $2\,R$ dimensioni.

Consideriamo una infinità di modelli di gas, analoghi a quello considerato: cioè gruppi di n molecole identiche, racchiuse in recipienti uguali, con energia totale uguale per ogni modello.

Or bene *noi ammettiamo* che, qualunque sia la configurazione e lo stato di movimento di ogni modello, l' insieme di questi modelli, dopo un certo tempo, per effetti complessi, che si comportano *come dovuti al caso,* finiscano coll' essere rappresentati, *nella parte di spazio a $2R$ dimensioni nella quale possono muoversi, da punti ivi distribuiti con densità uniforme.*

Con riferimento a questo ipotetico stato di cose noi possiamo dire: *Scelto a caso un modello di un gas con n molecole, tra una infinità di altri modelli consimili, la probabilità che il punto che lo rappresenta abbia coordinate comprese negli intervalli.*

$$(7)\quad q_1, q_1+\Delta q_1; \ldots; q_R, q_R+\Delta q_R; p_1, p_1+\Delta p_1; \ldots; p_R, p_R+\Delta p_R$$

è proporzionale al volume del cubo (a $2R$ dimensioni)

$$(8)\qquad \Delta\omega = \Delta q_1 \ldots . \Delta q_R . \Delta p_1 \ldots . \Delta p_R .$$

Sia p la probabilità che scelto un modello a caso, questo modello abbia il suo punto rappresentativo in una parte dello spazio a $2R$ dimensioni, di volume eguale a $\Delta\omega$.

Supporremo lo spazio anzidetto diviso in tante parti, tutte di volume eguale a $\Delta\omega$.

Ciò premesso, noi possiamo supporre le n molecole di un singolo modello distribuite in v gruppi, rispettivamente di numeri di molecole

$$(9)\qquad \Delta n_1, \Delta n_2, \ldots, \Delta n_v,$$

tali che le molecole del gruppo Δn_u, $[u = 1, 2, \ldots v]$, abbiano praticamente, cioè nei limiti di approssimazione delle misure che possono eseguirsi, le stesse coordinate p_i e q_i (che sono in numero di $2r$). Dovrà essere, ovviamente, il numero v assegnato in modo che i v gruppi contengano praticamente tutti i possibili valori delle coordinate p_i e q_i delle n molecole.

Ora, un modello, scelto a caso, potrà presentare la distribuzione (9), ma la *stessa* distribuzione potranno presentare altri modelli tra gli innumerevoli che si possono considerare. Noi ricerchiamo *la probabilità che, in un modello scelto a caso,* Δn_1 *molecole abbiano, prescindendo dal loro ordine, coordinate assegnate praticamente eguali,* Δn_2 *molecole abbiano analogamente coordinate assegnate praticamente eguali,* etc. La probabilità richiesta è data dalla probabilità p, precedentemente indicata, moltiplicata per il numero dei modi in cui si possono disporre n elementi, tra i quali Δn_1 sono riguardati come identici, Δn_2 sono pure considerati come identici, etc. In altri termini noi riguardiamo come identici due modelli che abbiano la distribuzione (9) anche in seguito a uno scambio di posto delle molecole del gruppo Δn_1, del gruppo Δn_2, etc. La probabilità ricercata è dunque

$$(10) \qquad P = \frac{n!}{\Delta n_1! \; \Delta n_2! \ldots \Delta n_\nu!} \, p$$

tenendo presente che è

$$(11) \qquad \Delta n_1 + \Delta n_2 + \ldots + \Delta n_\nu = n$$

e che la parte dello spazio a $2R$ dimensioni entro cui può muoversi il punto rappresentativo di un modello è delimitata dalla condizione (6) che è una equazione nelle q_i, q'_i.

Proponiamoci di determinare, *tra le ripartizioni delle coordinate* q_i, p_i *delle molecole di un gas, quella di massima probabilità.*

Bisognerà rendere massima la (10), tenendo conto della (11) e della (6). Quest' ultima, ricordando che l' energia totale di una molecola, nelle ipotesi da noi fatte, dipende soltanto dalle coordinate p_i e q_i che si riferiscono ad essa molecola, può scriversi per approssimazione

$$(12) \qquad H = \Delta n_1 . E_1 + \Delta n_2 . E_2 + \ldots + \Delta n_\nu . E_\nu = \text{costante},$$

essendo E_1, E_2, ..., E_ν le energie totali che, approssimativamente, si riferiscono rispettivamente a una molecola del gruppo Δn_1, del gruppo Δn_2, etc. Ridotto il problema a questi termini, l'uso della formola di STIRLING e l'ipotesi della variazione continua dell'energia conducono con facili considerazioni ad esprimere che il massimo valore della (10) si ha in corrispondenza alla ripartizione:

$$(13) \qquad \Delta n = C . e^{-\frac{E}{\theta}} . \Delta\omega$$

nella quale il *modulo* θ e la costante C sono determinate dalle condizioni, corrispondenti a (12) e (11),

$$(14) \qquad C\int E . e^{-\frac{E}{\theta}} . d\omega = H, \qquad C\int e^{-\frac{E}{\theta}} d\omega = n$$

l'integrazione essendo estesa alla parte di spazio a $2r$ dimensioni entro cui può muoversi il punto rappresentativo di una *singola molecola* del modello di gas.

Sino ad ora abbiamo considerato un solo tipo di molecole, ossia un unico gas. Considerando il caso di un miscuglio di più gas, ad es. di due, siamo condotti a studiare come si modifichino le (13), (14) nel caso che le n molecole (sistemi materiali in moto) qui studiate siano di due tipi diversi che chiamiamo α e β.

Estendendo i ragionamenti fatti potremo osservare quanto segue.

Se n_α e n_β sono le molecole di tipo α e di tipo β, e se sono $2r_\alpha$ le coordinate che rappresentano una molecola di tipo α e $2r_\beta$ quelle relative a una molecola di tipo β, le $n_\alpha + n_\beta$ molecole di un modello saranno rappresentate da un punto in uno spazio a

$$(15) \qquad 2\,R = 2\,(n_\alpha . r_\alpha + n_\beta . r_\beta)$$

dimensioni. In base ad ipotesi analoghe a quelle fatte nel caso di un solo tipo di molecole, perveniamo a dividere lo spazio precedente in elementi di egual volume $\Delta\omega$ (a $2\,R$ dimensioni). Sarà ancora costante $= p_1$ la probabilità che un modello scelto a caso abbia il suo punto rappresentativo entro un *determinato* elemento di volume $\Delta\omega$. *La probabilità che, in un modello scelto a caso, le molecole α si scindano in gruppi*

$$(16) \qquad {}_{\alpha}\Delta n_1,\ {}_{\alpha}\Delta n_2, \ldots,\ {}_{\alpha}\Delta n_\nu,$$

e le molecole β in gruppi

$$(17) \qquad {}_{\beta}\Delta n_1,\ {}_{\beta}\Delta n_2, \ldots,\ {}_{\beta}\Delta n_\mu,$$

corrispondenti a determinate distribuzioni dei valori delle coordinate, rimane espressa da

$$(18) \qquad P = \frac{n_\alpha!\ n_\beta!}{{}_{\alpha}\Delta n_1!\ {}_{\alpha}\Delta n_2! \ldots {}_{\alpha}\Delta n_\nu!\ {}_{\beta}\Delta n_1!\ {}_{\beta}\Delta n_2! \ldots {}_{\beta}\Delta n_\mu!}\, p_1$$

in cui va tenuto presente che deve essere:

$$(19) \qquad \begin{gathered} \Sigma\, {}_{\alpha}\Delta n = n_\alpha \\ \Sigma\, {}_{\beta}\Delta n = n_\beta \\ H = \Sigma\, {}_{\alpha}\Delta n \,.\, {}_{\alpha}E + \Sigma\, {}_{\beta}\Delta n \,.\, {}_{\beta}E = \text{costante}, \end{gathered}$$

denotando qui con ${}_{\alpha}E$, ${}_{\beta}E$ le energie totali che approssimativamente competono a una molecola del corrispondente gruppo ${}_{\alpha}\Delta n$, ${}_{\beta}\Delta n$.

La ricerca del massimo di P, analogamente al caso di un sol tipo di molecole, conduce alle leggi di distribuzione

$$(20) \qquad \begin{gathered} {}_{\alpha}\Delta n = A \,.\, e^{-\frac{{}_{\alpha}E}{\theta}} \,.\, \Delta\omega \\ {}_{\beta}\Delta n = B \,.\, e^{-\frac{{}_{\beta}E}{\theta}} \,.\, \Delta\omega \end{gathered}$$

nelle quali le costanti A, B e il *modulo* θ vanno determinate dalle equazioni, corrispondenti alle (19),

$$(21) \qquad A\int e^{-\frac{{}_{\alpha}E}{\theta}}\, d\omega = n_\alpha, \qquad B\int e^{-\frac{E_\beta}{\theta}}\, d\omega = n_\beta$$

$$(22) \qquad H = A\int {}_{\alpha}E\, e^{-\frac{{}_{\alpha}E}{\theta}}\, d\omega + B\int {}_{\beta}E\, e^{-\frac{{}_{\beta}E}{\theta}}\, d\omega.$$

Nelle (21), (22) le integrazioni si estendono ai *possibili valori* che possono assumere le coordinate p_i, q_i che si riferiscono alle molecole α o alle molecole β: cioè rispettivamente a spazi di $2r_\alpha$, $2r_\beta$ dimensioni.

Seguitando nelle deduzioni dalle ipotesi fatte cerchiamo ora, in vista delle applicazioni, di trasformare le leggi di BOLTZMANN-GIBBS (20) in modo opportuno.

3. *Espressione delle leggi di Boltzmann-Gibbs mediante i momentoidi.* — Seguitiamo, per maggiore generalità, a considerare il caso di due tipi di molecole α e β e ricordiamo dalla meccanica che, nelle ipotesi di natura meccanica fatte, valgono le considerazioni seguenti.

La energia *totale* di una molecola α risulta dalla somma della energia cinetica ${}_\alpha L$, dell' energia potenziale dovuta alle forze interne ${}_\alpha V_i$, e dell' energia potenziale dovuta alle forze esterne ${}_\alpha V_e$:

$$(23) \qquad {}_\alpha E = {}_\alpha L + {}_\alpha V_i + {}_\alpha V_e.$$

La funzione ${}_\alpha V_i$ non dipende dalle tre coordinate del centro di gravità, ma dalle restanti coordinate q_i della molecola che sono in numero di $r_\alpha - 3$.

La funzione ${}_\alpha V_e$ dipende dalle sole coordinate del centro di gravità.

La funzione ${}_\alpha L$, infine, è, come è noto, una funzione quadratica di $p_1, p_2, \ldots, p_{r_\alpha}$ nella quale entrano, come coefficienti, delle funzioni di $q_1, q_2, \ldots, q_{r_\alpha}$:

$$(24) \qquad 2\, {}_\alpha L = a_{11}\, p_1^2 + a_{12}\, p_1\, p_2 + \ldots .$$

Indicando con u, v, w le componenti, riferite ad assi ortogonali, delle velocità del centro di gravità della molecola che si considera, è noto che possono esprimersi le coordinate p_1, $p_2, \ldots, p_{r_\alpha}$ linearmente per mezzo di altre u, v, w, η_1, $\eta_2, \ldots$, $\eta_{r_\alpha - 3}$, in modo che la (24) resti trasformata nella seguente:

$$(25) \qquad 2.\, {}_\alpha L = m_\alpha (u^2 + v^2 + w^2) + c_1\, \eta_1^2 + \ldots + c_{r_\alpha - 3}\, \eta_{r_\alpha - 3}^2$$

e che risulti eguale all' unità il determinante funzionale delle p_i rispetto alle u, v, w ed η_i. Nella (25), m_α rappresenta la massa di una molecola α; le $c_1, c_2, \ldots, c_{r_\alpha - 3}$ non dipendono dalle u, v, w, η_i che si chiamano *momentoidi*.

Ricordando ancora che delle coordinate $q_1, q_2, \ldots, q_{r\alpha}$ tre possono farsi corrispondere alle coordinate ortogonali x, y, z del centro di gravità delle molecole, possiamo mettere in evidenza le variabili dalle quali dipendono le grandezze che entrano nella (23):

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad {}_\alpha E = {}_\alpha V_i\,(q_1, q_2 \ldots, q_{r_\alpha - 3}) + {}_\alpha V_e\,(x, y, z) + \\
+ \frac{1}{2}\left[m_\alpha\,(u^2 + v^2 + w^2) + c_1 \eta_1^{\,2} + \ldots + c_{r_\alpha - 3} \cdot \eta^2_{r_\alpha - 3}\right]
\end{aligned}
$$

Per quanto è stato detto la *legge di* BOLTZMANN-GIBBS resta così espressa

$$
(27) \qquad {}_\alpha\Delta n = A\,e^{-\frac{{}_\alpha E}{\theta}} . \Delta x \Delta y \Delta z \Delta q_1 \ldots \Delta q_{r_\alpha - 3}\, \Delta u \Delta v \Delta w \Delta \eta_1 \ldots \Delta \eta_{r_\alpha - 3}
$$

con riferimento alle molecole α; per le molecole β si ha l'espressione analoga e le costanti A, B, θ restano determinate dalle analoghe alle (21), (22).

4. *Legge di distribuzione delle velocità di traslazione e della densità molecolare.* — Il numero di molecole, che hanno il centro di gravità con coordinate comprese tra

$$
(28) \qquad x,\ x + dx;\ y,\ y + dy;\ z,\ z + dz,
$$

e con componenti di velocità comprese tra

$$
(29) \qquad u,\ u + du;\ v,\ v + dv;\ w,\ w + dw,
$$

è dato, per la (27), tenendo presente la (26), da

$$
\begin{aligned}
(30) \qquad & e^{-\frac{{}_\alpha V_e (x, y, z)}{\theta}} . e^{-\frac{1}{2} m_\alpha (u^2 + v^2 + w^2)} dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw \times \\
& \times \int F(q_1, \ldots, q_{r_\alpha - 3},\ \eta_1, \ldots, \eta_{r_\alpha - 3})\, dq_1 \ldots d\eta_{r_\alpha - 3}
\end{aligned}
$$

l' integrale essendo esteso ai *possibili* valori di $q_1, \ldots, \eta_{r_\alpha - 3}$.

Il numero di molecole ricercato è dunque dato, essendo C una costante, da

$$(31)\qquad dn = C.e^{-\frac{{}_aV_e(x,y,z)}{\theta}}\, e^{-\frac{1}{2\theta} m_a (u^2+v^2+w^2)}.\, dxdydz.dudvdw.$$

Nel caso in cui non esistano forze esterne si ha per risultato (ponendo ${}_aV_e = o$)

$$(32)\qquad dn = C\, e^{-\frac{1}{2\theta} m_a (u^2+v^2+w^2)}\, dx\, dy\, dz.\, du\, dv\, dw.$$

Esamineremo in primo luogo questo secondo caso. Se vogliamo il numero di molecole compreso in un piccolo spazio di volume γ del recipiente, dobbiamo integrare la (32) in questo spazio di volume γ per i valori di x, y, z, e per tutti i possibili valori di u, v, w. Essendo D una costante risulta:

$$(33)\qquad n_\gamma = D.\gamma$$

e per tutto il recipiente di volume Γ:

$$(34)\qquad n_\Gamma = D.\,\Gamma$$

da cui

$$(35)\qquad \frac{n_\Gamma}{n_\gamma} = \frac{\Gamma}{\gamma}$$

ossia *le molecole si distribuiscono con densità uniforme in ogni parte del recipiente.*

Se, invece, integriamo la (32) soltanto pei valori di x, y, z, nel volume γ che si considera, ricaviamo che è

$$(36)\qquad dn'_\gamma = C.\gamma.\, e^{-\frac{1}{2\theta} m_\alpha (u^2+v^2+w^2)}\, du.\, dv.\, dw,$$

il numero delle molecole che hanno velocità soddisfacenti alle (29) *e compresi in uno spazio di volume γ del recipiente.* Risulta per l'intero recipiente

$$dn'_\Gamma = C.\Gamma.\, e^{-\frac{1}{2\theta} m_\alpha (u^2+v^2+w^2)}\, du.\, dv.\, dw.$$

Tenendo presente la (36), e ponendo $\gamma = 1$, risulta che il numero di molecole α comprese nell' unità di volume, e che *hanno velocità soddisfacenti alle* (29), è *dato da*

$$(37) \qquad dn' = C e^{-\frac{1}{2\theta} m_\alpha (u^2 + v^2 + w^2)} du. dv. dw.$$

Scrivendo che, nell' unità di volume, il numero delle molecole deve essere uguale a $\frac{n\Gamma}{\Gamma}$, cioè ponendo questo valore uguale all' integrale della (37) esteso al campo di variabilità di u, v, w (si assume che u, v, w varino, senza commettere errore sensibile, da $-\infty$ a $+\infty$), si ha

$$(38) \qquad C = \frac{n\Gamma}{\Gamma}\sqrt{\frac{m_\alpha^3}{8\pi^3\theta^3}}.$$

Nel secondo dei casi considerati è chiaro che la densità molecolare delle molecole α cambia da un punto all' altro del recipiente per la presenza della funzione ${}_\alpha V_e\ (x, y, z,)$ nella (31).

Se integriamo la (31) nel possibile campo di variabilità di u, v, w, otteniamo, per il numero di molecole che hanno il centro di gravità con coordinate soddisfacenti alla (28), la espressione

$$(39) \qquad dn = D. e^{-\frac{{}_\alpha V_e(x, y, z)}{\theta}} dx dy dz.$$

Se, invece, integriamo la (31) in un campo di variabilità di x, y, z, (una parte dello spazio del recipiente), risulta sempre per la distribuzione delle velocità u, v, w una espressione del tipo

$$(40) \qquad dn' = K_s e^{-\frac{1}{2\theta} m_\alpha (u^2 + v^2 + w^2)} du. dv. dw$$

ma qui però, K_s, invece di essere una costante, per spazi di volume eguale compresi nel recipiente, come indica la (36), è una quantità variabile secondo la posizione degli spazi prescelti.

Ma anche in questo caso, più generale del precedente, essendo n_v il numero delle molecole α che appartengono alla parte di spazio considerata di volume v, risulta:

$$(41) \qquad K_s = n_v\sqrt{\frac{m_\alpha^3}{8\pi^3\theta^3}}.$$

Pertanto, se in una data regione del recipiente *la concentrazione delle molecole* è $\rho = \frac{n_v}{v}$, le (40), (41) fanno scrivere la distribuzione delle velocità tenendo conto delle concentrazioni.

Un caso che qui interessa porre in rilievo è quello in cui le molecole del gas, racchiuso in un recipiente, sono sottoposte alla sola gravità:

$$ {}_{a}V_e = m_a \, . \, g \, . \, z. \tag{42} $$

Per un elemento di volume all' altezza z, la (39) fa allora scrivere:

$$ \Delta n = D \, . \, e^{-\frac{m_a \, . \, g \, . \, z}{\theta}} \, . \, \Delta v \tag{43} $$

e si ha la legge di decrescenza delle concentrazioni al variare dell' altezza:

$$ \rho(z) = D . e^{-\frac{m_a . g . z}{\theta}} . \tag{44} $$

Il numero delle molecole, *per unità di volume* ($v = 1$), che hanno velocità soddisfacenti alle (29), è dato, per le molecole di gas che possono senza errore sensibile considerarsi all' altezza z, dalle (40), (41), posto $n_v = \rho(z)$.

La (44) poi dà per il rapporto delle concentrazioni alle altezze z, $z + H$, come è facile vedere,

$$ \log . \frac{\rho_{z+H}}{\rho_z} = -\frac{1}{\theta} m_{a} . \, g . \, H. \tag{45} $$

in cui

$$ \theta = \text{costante}. \tag{46} $$

È ovvio che le considerazioni fatte per le molecole di tipo α valgono *contemporaneamente* per le molecole di tipo β che entrano nel miscuglio considerato.

5. *Legge dell' equipartizione dell' energia.* — Proponiamoci, considerando un miscuglio di due gas, di determinare il valore medio dell' energia cinetica, *per ogni grado di libertà* inerente al sistema materiale in moto che rappresenta una molecola.

Dobbiamo tenere presenti le formole *più generali* qui esposte, cioè la (26) e la (27) per le molecole α, e le analoghe per le molecole β.

Determiniamo, ad es., il valore medio di $c_1\,\eta_1^2$ per una determinata regione, *ma del resto qualunque*, del recipiente contenente il miscuglio di gas.

Tale valore medio è ovviamente dato da

$$(47)\qquad \overline{c_1\eta_1^2}=\frac{\displaystyle\iint\ldots e^{-\frac{V_i+V_e}{\theta}}\,e^{-\frac{1}{2\theta}(mu^2+mv^2+mw^2+c_1\eta_1^2+\ldots+c_{r_\alpha-3}\,\eta_{r_\alpha-3}^2)}\,.\,c_1\eta_1^2.dx.dy.dz.dq_1\ldots dq_{r_\alpha-3}du\ldots d\eta_{r_\alpha-3}}{\displaystyle\iint\ldots e^{-\frac{V_i+V_e}{\theta}}\,e^{-\frac{1}{2\theta}(mu^2+mv^2+mw^2+c_1\eta_1^2+\ldots+c_{r_\alpha-3}\,\eta_{r_\alpha-3}^2)}\,dx\ldots dq_{r_\alpha-3}\,du\ldots d\eta_{r_\alpha-3}.}$$

gli integrali essendo estesi ai *possibili valori* di $u,\ldots\,\eta_{r_\alpha-3}$, *ai possibili valori* di $q_1,\ldots,\,q_{r_\alpha-3}$, e *ai possibili valori* di x. y, z, che convengono alla assegnata parte di spazio del recipiente.

Dalla (47) si deduce facilmente

$$(48)\qquad \overline{c_1\,\eta_1^2}=\theta$$

In generale si ha dunque per le molecole, di tipo α e di tipo β, del miscuglio:

$$(49)\quad \overline{m_\alpha u^2}=\overline{m_\alpha v^2}=\overline{m_\alpha w^2}=\overline{c_1\eta_1^2}=\ldots=\overline{m_\beta u^2}=\overline{m_\beta v^2}=\ldots=\theta$$

eguaglianze che esprimono appunto la *legge di equipartizione dell' energia*.

6. *Interpretazione dei risultati precedenti.* — Se noi guardiamo alle ipotesi probabilistiche fatte e alle conseguenze che ne abbiamo tratto, possiamo dire:

Concepito il miscuglio di due gas come il miscuglio di due insiemi materiali in moto, questo miscuglio tenderà ad una posizione di equilibrio statistico nel quale si verificano tutte le proprietà dimostrate. E questa posizione di equilibrio si manterrà a meno di scarti accidentali.

Le caratteristiche principali di questa posizione di equilibrio si riferiscono:

a) alla distribuzione della densità molecolare.

b) alla distribuzione delle velocità di traslázione delle molecole.

c) alla equipartizione dell' energia.

7. *Determinazione della pressione dovuta agli urti delle molecole.* — Andando più innanzi nelle deduzioni, e sorvolando su alcuni particolari, calcoliamo qual' è la pressione che le molecole considerate provocano coi loro urti su di un elemento di parete del recipiente.

Fermiamo l' attenzione sulle molecole tipo α. Sia p la pressione, riferita all' unità di superficie, che si esercita sull' elemento dS di parete del recipiente (considerata come media delle pressioni rispetto al tempo). Sarà quindi $p.dS.dt$ la somma delle componenti normali delle forze impulsive su dS, durante il tempuscolo dt. Le componenti parallele a dS non hanno ovviamente effetto.

Prendiamo un sistema di assi rettangolari (u, v, w), tali che l' asse delle u sia normale a dS.

Ciò premesso consideriamo l' impulso di una molecola sull' elemento dS.

Poichè la componente, normale a dS, della velocità della molecola è u, questa comunicherà all' elemento dS una quantità di moto $m_\alpha.u$. La molecola poi ritornerà indietro con una quantità di moto $m_\alpha.u'$ e per reazione la parete riceverà ancora una quantità di moto uguale a $-m_\alpha.u'$; è ovviamente u' di segno contrario ad u. In definitiva la quantità di moto che riceve dS per l' urto di una molecola è

$$m_\alpha\,(u-u'), \tag{50}$$

e per tutte le molecole α, che urtano dS nel tempuscolo dt, è

$$\Sigma' m_\alpha\,(u-u'), \tag{51}$$

la sommatoria essendo estesa alle molecole α che nel tempuscolo dt urtano dS.

Si può dunque scrivere

$$p.\,dS.\,dt = \Sigma m_\alpha\,(u-u'). \tag{52}$$

Supporremo che il gas sia sottoposto all' azione della gravità; perciò tra due altezze, molto vicine, H, $H + \Delta H$, potremo supporre che il gas abbia una concentrazione ovunque costante. Supporremo l' elemento dS compreso tra le altezze precedenti che ora considereremo.

Determiniamo prima

$$\Sigma m_\alpha \, u, \tag{53}$$

cioè il numero delle molecole che, nel tempuscolo dt, *vanno* ad urtare dS.

Cominciamo perciò dal determinare il numero delle molecole che, al principio del tempuscolo dt, hanno velocità comprese tra

$$u, u + du; \; v, v + dv; \; w, w + dw \tag{54}$$

e che *vanno* ad urtare dS in quel tempuscolo.

Il numero di molecole, *comprese nell' unità di volume*, tra le altezze H, $H + dH$, che hanno velocità soddisfacenti alle (54), per le (40), (41) è dato da

$$n_H . f(u, v, w) \, du \, dv \, dw = n_H \sqrt{\frac{m_\alpha^3}{8\pi^3 . \theta^3}} \, e^{-\frac{1}{2\theta} m_\alpha (u^2 + v^2 + w^2)} du . dv . dw. \tag{55}$$

Di queste molecole urteranno l' elemento dS quelle che, al principio del tempuscolo dt, si troveranno ovviamente nell' elemento di volume

$$dS . \, u . \, dt, \tag{56}$$

e poichè abbiamo pur visto che le velocità si comportano come grandezze *indipendenti* dalla posizione delle molecole possiamo asserire che il numero delle molecole, *dell' unità di volume*, che nel tempuscolo dt *vanno* ad urtare dS avendo velocità soddisfacenti alle (54), è dato da

$$n_H . \, f(u, v, w) \, du . \, dv . \, dw . \, dS . \, u . \, dt. \tag{57}$$

Avuto riguardo a queste molecole la parte di $\Sigma m_\alpha u$ ad esse spettante sarà:

$$n_H . \, f(u, v, w) \, du . \, dv . \, dw . \, dS . u . \, dt . \, m_\alpha u. \tag{58}$$

Per avere il valore complessivo di $\Sigma m_\alpha u$, sempre con riferimento alle molecole n_H che occupano *un volume unitario*, bisognerà integrare la (58) per *i possibili valori* positivi e negativi di v, w e per i possibili valori positivi di u.

Analogamente si dimostra che $-\Sigma m_\alpha . u'$ è dato dall' integrale della (58) esteso ai possibili valori positivi e negativi di v, w e ai possibili valori negativi di u, sempre con riferimento alle molecole n_H del *volume unitario* considerato.

Ne segue

$$(59) \quad \Sigma m_\alpha (u - u') = n_H m_\alpha dS.dt \iiint^{+\infty} f(u, v, w)\, u^2\, du\, dv\, dw.$$

e, tenuta presente la (52) e il teorema sull' equipartizione della energia,

$$(60) \qquad p_H = n_H . \overline{m_\alpha u_\alpha^2}$$

Trasformiamo ancora la (60). Si ha, per il valore medio del quadrato della velocità di una molecola α,

$$(61) \qquad \overline{u_\alpha^2} + \overline{v_\alpha^2} + \overline{w_\alpha^2} = \overline{c_\alpha^2}$$

e ancora, poichè tra le altezze H, $H + \Delta H$ si è supposta una concentrazione ovunque costante, si ha la relazione

$$(62) \qquad n_H = \frac{N_H}{v}$$

se N_H indica il numero di molecole, all' altezza H, comprese nel volume v. Tenendo conto di (61), (62), la (60) si trasforma nella seguente :

$$(63) \qquad p_H . v = \frac{1}{3} N_H . \overline{m_\alpha c_\alpha^2} = N_H . \theta.$$

La relazione (63) ha il seguente significato :

La pressione esercitata dal gas (molecole α) *sull' unità di superficie, all' altezza di H, è data dai due terzi dell' energia di traslazione delle molecole che, avendo la concentrazione corrispondente alla altezza H, sono comprese nella unità di volume.*

Analogamente dicasi per le molecole β. È ovvio, dall' analisi svolta, che per ottenere la pressione totale bisogna fare la somma delle pressioni dovute ai due tipi α, β di molecole. Ma ritorneremo su questo punto.

Scrivendo la (63 per due altezze diverse, $z, z+H$, si deduce facilmente:

$$(64) \qquad \frac{p_z}{p_{z+H}} = \frac{\rho_z}{\rho_{z+H}}$$

e, quindi per la (45):

$$(65) \qquad \log \frac{p_z}{p_{z+H}} = lg \frac{\rho_z}{\rho_{z+H}} = \frac{1}{\theta} m_\alpha . g . H = \frac{g}{\overline{u^2}} H.$$

Le pressioni, cioè, *alle diverse altezze stanno come le concentrazioni*. Se il valore $\frac{g}{\overline{u^2}} H$ è trascurabile per le diverse altezze che si considerano, si può scrivere ovviamente, *qualunque sia la posizione dell'elemento sul quale si calcola la pressione*,

$$(66) \qquad p.v = \frac{1}{3} N . \overline{m_\alpha c_\alpha^2} = N.\theta.$$

Per avere una idea sull'ordine di grandezza del rapporto $\frac{g}{\overline{u^2}}$ si rifletta che, ad es., per l'ossigeno si ha, come vedremo, $\overline{u^2} = 70{,}895$ onde $\frac{g}{\overline{u^2}} \cong 0.00014$.

8. *Osservazioni sull'analisi precedentemente svolta.* — In tutta l'analisi che precede abbiamo eseguito delle integrazioni non tenendo conto in modo esatto dei *possibili valori* che sono suscettibili di potêre assumere le variabili x, y, z, u, v, w. Si è così fatto variare u, v, w, da $-\infty$ a $+\infty$ non badando che un limite alle componenti delle velocità è imposto dalla condizione che l'energia totale deve essere costante; e si sono fatti pure variare le coordinate x, y, z senza tener conto che le coordinate anzidette non possono assumere tutti i valori che consente una determinata parte di spazio del recipiente, perchè il centro di gravità di una molecola non può essere interno allo spazio occupato da un'altra molecola, nè la sua distanza da una parete del recipiente può essere minore del suo raggio se la molecola ha la forma di una sfera.

La inesattezza commessa per le velocità ha conseguenze trascurabili, e ciò riesce evidente quando si pensi alla forma analitica che ha la legge di distribuzione della velocità. L'altra, invece, quando venga corretta, conduce a divergenze dalle leggi di BOYLE-GAY-LUSSAC, di DALTON e di AVOGADRO, delle quali ci occuperemo subito. Si riferiscono a questa inesattezza alcune considerazioni di VAN DER VAALS e lo svolgimento di una analisi sulla quale non possiamo intrattenerci.

Possiamo dire che l'analisi qui svolta resta essenzialmente senza varianti per la legge di distribuzione delle velocità di traslazione qualunque sia la grossezza delle molecole, e che essa si riferisce a molecole di grossezza trascurabile nei riguardi della determinazione della pressione. Possono pure accettarsi, così come sono indicati, i risultati sulla legge di variazione della densità.

9. *Le leggi di Boyle–Gay–Lussac, di Dalton e di Avogadro.* — È noto, dalla fisica elementare, che queste leggi valgono in modo solo approssimato per i gas che sono lontani dal loro punto di liquefazione.

Noi vedremo ora come queste leggi possano dedursi dalle considerazioni fatte in questo scritto quando si stabilisca una opportuna relazione tra la forza viva media e la temperatura. Naturalmente la relazione che stabiliremo è suggerita dalla esperienza, ma essa ci porta a stabilire il significato meccanico della temperatura e a suggerire delle ricerche per meglio cimentare il valore delle ipotesi fatte.

Un' altra osservazione si rende utile: l'analisi qui svolta ha appunto trascurato quelle forze di coesione le quali sono effettivamente trascurabili nei casi in cui sono applicabili le leggi indicate, come risulta dalle esperienze.

Noi poniamo in tutte le formole precedenti, nelle quali entra la forza viva media, in base alla *relazione generale* (49),

$$(67)\quad \overline{m_\alpha u^2} = \overline{m_\alpha v^2} = \overline{m_\alpha w^2} = \overline{c_1 \eta_1^2} = \ldots = \overline{m_\beta u^2} = \overline{m_\beta v^2} = \ldots = \theta = K.T$$

in cui K è una costante per tutti i gas e T indica la temperatura assoluta del gas.

Considerando un unico gas, racchiuso in un recipiente di volume v, alla temperatura $T = 273^\circ + t$, ed essendo p la pressione per unità di superficie della parete del recipiente la (66) si può scrivere:

$$(68)\qquad p.\,v = N.\,K.\,T.$$

Variando T, resta costante NK; perciò per uno *stesso gas* posto

$$NK = R = \text{costante}, \tag{69}$$

la (68) si fa scrivere

$$p\,v = R.\,T \tag{70}$$

che riassume appunto le *leggi di* BOYLE-GAY-LUSSAC.

Considerando ancora la (70), osserviamo che essa si riferisce alle molecole di tipo α. Per le molecole di tipo β si ha l'analoga espressione. Di più se si considera l'analisi svolta nel n.° 7, riesce evidente *che la pressione esercitata sull'unità di superficie del recipiente, dalle molecole α e dalle molecole β, è la somma delle due pressioni separate*. È questa la *legge di* DALTON. Possiamo precisarla, nella forma della equazione caratteristica dei gas perfetti, nel modo seguente.

Scriviamo la (68) per le molecole α e per le molecole β, rinchiuse in un recipiente, alla temperatura T:

$$\begin{aligned} p_\alpha .\, v &= N_\alpha .\, K.\, T \\ p_\beta .\, v &= N_\beta .\, K.\, T \end{aligned} \tag{71}$$

da cui

$$(p_\alpha + p_\beta)\, v = p_{\alpha\beta} .\, v = (N_\alpha + N_\beta).\, K.\, T. \tag{72}$$

Consideriamo ora due gas alla stessa temperatura e alla stessa pressione. Varrà per entrambi i gas la relazione (68):

$$\begin{aligned} p.\, v_1 &= N_1 .\, K.\, T \\ p.\, v_2 &= N_2 .\, K.\, T, \end{aligned} \tag{73}$$

e si deduce

$$\frac{N_1}{v_1} = \frac{N_2}{v_2}, \tag{74}$$

cioè: *due gas, alla stessa temperatura e alla stessa pressione, contengono egual numero di molecole in eguali volumi*. È questa *l'ipotesi di* AVOGADRO.

10. *Determinazione della costante R per molecola-grammo di un gas.* — Se riferiamo la (68) ad una molecola-grammo (1) di gas, si ha, nelle condizioni normali di temperatura e di pressione,

$$v = v_A \cong \text{cmc. } 22{,}400 \tag{75}$$

e che $R_A = N_A . K$ assume uno stesso valore per tutti i gas. Ne segue, posto che sia

$$\begin{aligned} p &= 76 \times 13.595 \times 980.94 \text{ dine} \\ T &= 273^\circ, \end{aligned} \tag{76}$$

il seguente valore per la costante R:

$$R_A = \frac{p . v_A}{273} = 8.32 \times 10^7. \tag{77}$$

Se si vuol determinare il valore medio del quadrato della velocità di una molecola di un gas, la (66) lascia scrivere, indicando con ρ il peso del gas per unità di volume,

$$\overline{c^2} = \frac{p}{\frac{1}{3}\rho}. \tag{78}$$

Così essendo noto che a 0° centigradi, il peso di un cmc. di ossigeno è 0.00142945 grammi, si ricava, tenuto presente il valore della pressione (76),

$$\overline{c^2} = \overline{461.18}^2 \text{ metri al secondo,}$$

da cui si ottiene il valore di $\overline{u^2}$ del n.° 7.

---

(1) Un grammo-molecola di un composto, o di un elemento chimico, è dato da tanti grammi della sostanza quanti ne indica il peso molecolare di questa (per l'idrogeno 2.02 per l'ossigeno 32, etc.). Nelle condizioni normali di temperatura e di pressione il volume occupato da una molecola-grammo di gas è circa di litri 22.4. Ne segue per la legge di Avogadro, che due molecole-grammo di due gas contengono lo stesso numero N_A di molecole e per la (68), che due molecole-grammo di due gas, nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione, occupano lo stesso volume.

11. *Considerazioni intorno al calore specifico dei gas.* — Indicando con ε la *forza viva media* di una molecola, *per ogni grado di libertà* della molecola stessa, la (67) fornisce

$$\varepsilon = \frac{1}{2} K.T \tag{79}$$

e, per tutti i gradi di libertà r della molecola e per tutte le molecole di una molecola-grammo,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} N_A.K.T.r \\ &= \frac{1}{2} R_A.r.T. \end{aligned} \tag{80}$$

L' energia E, dato il modo come è stato determinato R_A, resta misurata in *ergs*. Se si vuole misurare E in piccole calorie bisogna tenere presente l' equivalente meccanico del calore, per cui una piccola caloria è uguale a 41.846×10^6 *ergs*. Si ricava allora

$$E = \frac{1}{2}\, 1.99.r.T. \tag{81}$$

La (81) dà la energia termica che possiede una molecola grammo del gas, alla temperatura T, supposto che una molecola costituisca un sistema materiale in moto con r gradi di libertà. Il calore specifico, a volume costante, è la derivata della (81) rispetto a T; indicandolo con c_v si ottiene

$$r \triangleq c_v. \tag{82}$$

Ora risulta dalle esperienze: $c_v \triangleq 3$, a tutte le temperature osservate, per i vapori di mercurio, per il kripton, l' elio, l' argon, il neon, lo xenon; $c_v \triangleq 5$ per i gas biatomici come l' idrogeno l' ossigeno, l' ossido di carbonio, l' azoto, il biossido di azoto, l' acido cloridrico, etc.; c_v variabile da 6 a 8 per alcuni gas come l' anidride carbonica, il vapore acqueo, l' acetilene, l'anidride solforosa, etc. che sono gas triatomici o poliatomici; etc.

I risultati ottenuti hanno condotto a fare delle ipotesi sulla costituzione delle molecole. Sono delle ricerche brillanti sulle quali non possiamo intrattenerci. Ci limitiamo a mettere in rilievo che il fatto che le molecole di un gas monoatomico accusano, nelle ipotesi fatte, tre gradi di libertà soltanto, quanti cioè ne convengono al centro di gravità di una molecola, ossia al solo moto di traslazione della molecola, lascia ammettere che questa non abbia moti di rotazione; che, cioè, le molecole di un gas monoatomico si comportino come punti materiali perfettamente elastici.

I gradi di libertà che accusano le molecole di un gas qualsiasi tendono a diminuire di numero col diminuire della temperatura, ma è caratteristico il fatto che mai vanno al disotto di *tre*. È possibile che le molecole di tutti i gas, osservabili a temperature molto basse, finiscano col non comunicare, coi loro urti, energie di rotazione.

12. *Estensioni delle leggi dei gas alle soluzioni diluite.* — La estensione delle leggi dei gas alle soluzioni è stata della più grande importanza: si è avuto il mezzo di controllare il moto delle molecole di un fluido; si è data una base sperimentale alla teoria cinetica della materia.

Ora sono da ricordare i risultati degli studi di Pfeffer e di Van t' Hoff sulle soluzioni diluite. Ogni sostanza, disciolta in un liquido, esercita una *pressione osmotica* la quale obbedisce a leggi analoghe a quelle di Boyle–Gay-Lussac e di Avogadro. Possiamo dire: se in un volume v di una soluzione è N il numero di molecole disciolte, ed è p la pressione osmotica, si ha

$$p.\, v = N.\, K_1\, T. \tag{83}$$

Naturalmente la relazione precedente veniva riconosciuta non come rigorosa ma come approssimativamente valevole nei casi in cui la concentrazione delle molecole della sostanza disciolta nel solvente fosse paragonabile a quella per cui i gas soddisfano alla legge stessa.

Va a grande merito di J. Perrin l'osservazione seguente: Le leggi sulle soluzioni sono applicabili sia a molecole di alto peso molecolare che di piccolo peso molecolare, per quanto invisibili. Non è allora da supporre che si possano ancora riscontrare le leggi delle soluzioni nelle emulsioni fatte di granuli visibili? Egli è così passato allo studio di certe emulsioni i cui granuli possono rendersi visibili al microscopio.

Le emulsioni specialmente usate dal PERRIN sono acquose, di *mastice* e di *gomma-gutta*, lavorate in modo che i granuli riescano pressochè eguali. Altri liquidi usati sono l' acqua zuccherata e la glicerina.

13. *Moti browniani.* — Se si hanno delle sospensioni in un liquido, le particelle osservate si muovono, si agitano, incessantemente: è il movimento scoperto dall' inglese BROWN nel 1827 e che non sembra sia da attribuire a *cause esterne al liquido che si considera.*

Il moto browniano è stato in seguito attribuito all' urto delle molecole del liquido contro le particelle sospese; si tratta quindi di moti irregolari, *di carattere casuale*; idea questa seguita da EINSTEIN il quale ha elaborato una teoria quantitativa dei moti browniani.

Con le precedenti considerazioni possiamo ora estendere le formole probabilistiche di questo scritto al caso dei granuli considerati dal PERRIN.

14 *Estensione delle leggi dei gas alle emulsioni diluite.* — Consideriamo una massa liquida, racchiusa in un recipiente, *in equilibrio termico.* Supponiamo che in essa non agiscano forze esterne diverse dalla gravità.

Una molecola liquida è, nell' interno della massa, egualmente attratta, o quasi, dalle molecole che la circondano; ne segue un movimento di essa, nella massa stessa, che noi *supponiamo* abbia i caratteri della casualità. Un granulo, immerso nel liquido, per gli urti delle molecole liquide riceve movimenti che hanno pure il carattere della casualità. Sono queste delle ipotesi plausibili se le conseguenze che se ne traggono sono giustificate dalla esperienza.

Supporremo applicabile il principio della conservazione dell' energia. Avrà quindi una energia totale costante la massa di liquido insieme coi granuli, in quanto vi sia sempre l' equilibrio termico, e supporremo che, in tali condizioni, abbia pure energia totale costante la massa liquida *prescindendo dai granuli.* Tutto ciò equivale a supporre che all' insieme dei granuli competa *una energia totale costante.*

Possiamo allora considerare, come ipotesi di lavoro, il moto dei granuli nel liquido come analogo al moto delle molecole di un gas nello spazio che ad esse è riserbato.

Valgono allora per i granuli stessi le formole svolte in questo scritto; noi ne applicheremo alcune, con le necessarie modificazioni per adattarle all' esperimento, supponendo che per i granuli che si considerano valga lo *stesso valore della costante* K, (67), adottato per i gas.

È poi ovvio, per la definizione di molecola-grammo, che una molecola-grammo di granuli è data dal peso, in grammi, di un granulo, moltiplicato per il numero N_A di Avogadro.

Ciò premesso, è facile riconoscere che la formola (65), tenuto conto che $\theta = K.\,T$, va applicata ai granuli sostituendo al peso $g.\,m.$ di una molecola di gas, *il peso efficace* mg' di un granulo della emulsione.

Si ha cioè, per la densità dei granuli, alle altezze z, $z + H$, di una emulsione

$$(84)\qquad log\,\frac{\rho_z}{\rho_{z+H}} = \frac{1}{K.\,T}\,H.m.g'.$$

Il peso efficace mg' va determinato applicando il principio di Archimede. Sia perciò V il volume di un granulo della emulsione, D la densità della materia che costituisce il granulo, d la densità del liquido. La massa del granulo

$$(85)\qquad mg = V.\,D.g,$$

immersa nel liquido, riceve una spinta eguale a

$$(86)\qquad V.\,d.\,g.$$

Per tanto è

$$(87)\qquad m.g' = V\,(D - d)\,g.$$

Se, analogamente a quanto abbiamo fatto per i gas, al n°. 10, ci riferiamo a una molecola-grammo di granuli, si ha

$$(88)\qquad K.\,N_A = R_A$$

e la (84) si può scrivere:

$$(89)\qquad log\,\frac{\rho_z}{\rho_{z+H}} = \frac{N_A}{R_A.\,T}.\,V\,(D - A).g.\,H.$$

Nella (89) sono noti R_A e g. Se per una emulsione sono stati preventivamente determinati i valori di V, D, d e si determinano, alla temperatura T, le densità dei granuli in corrispondenza alle altezze z, $z+H$, si perviene alla determinazione di N_A. L'esperienza dirà se tal numero si accorda con i risultati ottenuti per i gas e per vie còmpletamente diverse.

Scrivendo la (89) per due temperature T, T_1, in corrispondenza a due altezze $z+H$, $z+H_1$ che, alle due temperature considerate, comportino gli stessi rapporti di densità rispetto a quella che si riferisce alla altezza z, cioè

$$\log \frac{\rho_z}{\rho_{z+H}} = \log \frac{\rho_z}{\rho_{z+H_1}},$$

si ricava la relazione, tenuta presente la (85),

$$\frac{H}{T}\left(1-\frac{d}{D}\right)=\frac{H_1}{T_1}\left(1-\frac{d_1}{D_1}\right). \tag{90}$$

Se le densità d, D, restano inalterate alle due temperature, si ha:

$$\frac{H}{T}=\frac{H_1}{T_1}. \tag{91}$$

La (90) va controllata dall'esperienza; essa costituisce un controllo della (89), nel quale si evita la conoscenza del numero di AVOGADRO.

Un'altra espressione interessa ricavare per potere sperimentare quantitativamente i moti browniani dei granuli.

Supponiamo che si voglia studiare la distribuzione delle componenti della velocità u, v dei granuli, su di un piano orizzontale. Per le ipotesi fatte è da controllare la legge

$$f(u,v)=A\,e^{-h^2(u^2+v^2)} \tag{92}$$

con A, h costanti.

Ora i movimenti di un granulo sono *incessantemente* variabili, in intensità e direzione, e pertanto non si rende possibile la determinazione di u e v. Si rende invece possibile l'osservazione degli spostamenti di un granulo, o di diversi granuli, dopo periodi di tempo eguali, ad es. di 30 in 30 secondi. Se si osservano, così, le componenti x, y delle proiezioni, su di un piano orizzontale, degli spostamenti di un granulo, o di diversi granuli, dopo periodi di tempo eguali, quale sarà la loro legge di distribuzione?

È intuitivo, senza deduzioni matematiche, che se le ipotesi fatte rispondono a una realtà, nello stesso modo col quale le variabili u, v si comportano come variabili indipendenti tra di loro, e dal posto che occupa il granulo, nello stesso modo si comporteranno le variabili x, y. Pertanto è da controllare se, per gli spostamenti indicati, vale la legge di distribuzione

$$F(x, y) = \left(\frac{k}{\sqrt{\pi}}\right)^2 e^{-k^2(x^2 + y^2)} \tag{93}$$

dovendo pure essere, quando sia M il simbolo di *valore medio*,

$$\frac{1}{2k^2} = M(x^2) = M(y^2) = X^2. \tag{94}$$

La probabilità che lo spostamento proiezione che si considera (rappresentato da un vettore del piano x, y, avente costantemente l' origine nel punto $x = y = 0$), abbia il suo estremo *nell' interno* del circolo di equazione

$$x^2 + y^2 = 2l. X^2 \tag{95}$$

è data, come è noto (1), da

$$1 - e^{-l}. \tag{96}$$

Se si cerca la probabilità che l' estremo del vettore caschi dentro un circolo di raggio r dovrà essere

$$2l X^2 = r^2 \tag{97}$$

onde la (96) si fa scrivere:

$$P(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2X^2}}. \tag{98}$$

In corrispondenza ai valori

$$r = \frac{\sqrt{2X^2}}{4}, \; 2\frac{\sqrt{2X^2}}{4}, \; 3\frac{\sqrt{2X^2}}{4}, \ldots \tag{99}$$

---

(1) G. Castelnuovo — Op. cit. pp. 235-236.

si ha rispettivamente per $P(r)$:

$$(100) \qquad 1 - e^{-\frac{1}{16}}, \quad 1 - e^{-\frac{4}{16}}, \quad 1 - e^{-\frac{9}{16}}, \ldots$$

e vedremo una applicazione di questi valori.

15. *Alcune esperienze del Perrin* — Consideriamo le ricerche sperimentali di J. PERRIN, limitatamente alle formole esposte nel numero precedente. Il PERRIN nelle sue esperienze ha potuto misurare in diversi modi la densità D della materia che forma i granuli, nonchè il volume V di un granulo e la sua massa m. Ha determinato altresi la densità del liquido, d, in cui si trovano i granuli — Le emulsioni qui considerate sono specialmente acquose, di gomma-gutta o di mastice.

Un primo esperimento si riferisce alla formula (84)

$$(101) \qquad \rho_{x+H} = \rho_x . e^{-\frac{mg'}{K.T}.H}$$

Si trattava di vedere se in una breve colonna di emulsione i granuli si distribuivano secondo la precedente relazione.

Esperimentando con granuli di gomma-gutta, di raggio $0^{\mu}.212$, a quattro altezze differenti, contate da una origine stabilita, e precisamente corrispondenti a

$$(102) \qquad 5^{\mu}; 35^{\mu}; 65^{\mu}; 95^{\mu},$$

il P. ha potuto osservare che su 13,000 granuli la ripartizione corrispondente alle altezze (102) riusciva proporzionale ai numeri

$$(103) \qquad 100; 47; 22.6; 12$$

quando, in base alla (101), sarebbe dovuta risultare proporzionale ai numeri

$$(104) \qquad 100; 48; 23; 11.1.$$

L'accordo è stato soddisfacente.

Un' altra osservazione fatta su granuli di mastice (raggio $= 0^{\mu}.52$), ad altezze equidistanti di 6^{μ}, ha fornito una ripartizione proporzionale ai numeri

$$(105) \qquad 1880; 940; 530; 305;$$

mentre i corrispondenti numeri tratti dalla (101) sono

(106) 1880; 995; 528; 280.

Ciò che si osserva è la colossale rarefazione dei granuli a lievissime altezze. La legge della rarefazione valida per i gas resta pur valida per i granuli di una emulsione ma, osserva il PERRIN, conduce essa, per le grandezze molecolari, ai numeri che ci attendiamo?

Uno di questi numeri, fondamentale nella fisica molecolare è il numero N_A di Avogadro. Questo numero, determinato per vie diverse, come concorda con quello che può ricavarsi dalla osservazione dei granuli?

Per la determinazione di N_A si tenga presente la (89).

Il PERRIN variando le condizioni delle delicatissime esperienze, operando insieme coi signori DABROWSKI, NIELS, BJERRUM, ha ottenuto risultati soddisfacentissimi nella determinazione del numero di Avogadro. Osservazioni su emulsioni sia di gomma-gutta che di mastice, su di una emulsione di gomma-gutta con la glicerina al 12 per cento d'acqua (in questo caso l'azione della gravità accumula i granuli nelle parti più elevate della colonna di emulsione che si osserva), e pur facendo altrimenti variare entro certi limiti la viscosità del liquido, hanno condotto a valori di N_A oscillanti tra

(107) $$65 \times 10^{22} \text{ e } 72 \times 10^{22},$$

d'accordo con risultati ottenuti per altre vie. Riportiamo le osservazioni del PERRIN sulla concordanza osservata: Questa « non può lasciare alcun dubbio sulla origine del moto browniano Diventa difficile negare la realtà obbiettiva delle molecole. Il movimento molecolare ci è reso visibile. Una emulsione è una atmosfera pesante in miniatura o piuttosto è un'atmosfera a molecole colossali, già visibili, nella quale la rarefazione è colossalmente rapida ma ancora percettibile ».

La serie di 13,000 granuli di gomma-gutta (raggio $0^{\mu}.212$), precedentemente accennata, aveva fornito

(108) $$N_A = 70.5 \times 10^{22}.$$

L'uniformità dei granuli non era però molto soddisfacente. Il PERRIN osservando una emulsione di gomma-gutta (raggio $0^{\mu}.367$), a granuli soddisfacentemente uniformi, ottenne

(109) $$N_A = 68.2 \times 10^{22}$$

valore da ritenersi migliore dei precedenti.

Le previsioni riassunte dalla relazione (90) sono state controllate dal Signor M. BRUHAT, che ha constatato un accordo molto soddisfacente con la realtà. Dice il PERRIN a tal proposito: Si vede con quale esattezza le leggi dei gas si estendano alle emulsioni diluite.

Altra questione studiata dall'A. stesso è quella che si riferisce alla legge di distribuzione delle componenti delle proiezioni, su di un piano orizzontale degli spostamenti dei granuli. Se la proiezione di ognuno di questi spostamenti, verificatosi in un determinato numero di secondi, viene rappresentata sul piano menzionato da un segmento eguale e parallelo ad essa, avente per origine un punto assegnato, vien facile studiare la distribuzione delle componenti di questi segmenti.

I risultati ottenuti da questo genere di controlli sono stati soddisfacentissimi. Ci limitiamo a riportare un esempio che costituisce, senza dubbio, una delle più belle applicazioni del calcolo delle probabilità.

Il Signor PERRIN facendo le puntate, di 30 in 30 secondi, su granuli di gomma-gutta (raggio $0^{\mu}.367$) ha osservato la legge di ripartizione degli spostamenti (proiezioni) di 500 granuli e ha verificato così che gli estremi degli spostamenti indicati si comportano perfettamente come colpi in un tiro al bersaglio. Il valore medio dei quadrati delle proiezioni osservate, cioè, per la (94),

$$(110) \qquad M(x^2 + y^2) = 2\,M(x^2) = 2\,\mathrm{X}^2 = \mu^2$$

è risultato $\overline{7^{\mu}.84}^{\,2}$. Il PERRIN ha contato gli estremi dei segmenti, di cui abbiamo detto, che erano compresi [formule (98)-(100)] tra le circonferenze di raggio 0 e $\frac{\sqrt{2X^2}}{4}$, $\frac{\sqrt{2X^2}}{4}$ e $2\frac{\sqrt{2X^2}}{4}$, etc. e ha fatto il paragone coi risultati teorici.

Nel quadro seguente sono riportati i valori teorici dedotti da (100) e i valori osservati dal P. (1).

---

(1) I valori teorici riportati dal PERRIN, a pag. 170 della sua opera citata, differiscono di alcune unità da quelli qui dati e dedotti applicando il metodo indicato al n. 14.

Spostamento compreso tra i limiti	Probabilità	Distribuzione calcolata	Distribuzione osservata
0 e $\frac{\mu}{4}$	0.061	31	34
$\frac{\mu}{4}$ e $2\frac{\mu}{4}$	0.160	80	78
$2\frac{\mu}{4}$ e $3\frac{\mu}{4}$	0.209	104	106
$3\frac{\mu}{4}$ e $4\frac{\mu}{4}$	0.202	101	103
$4\frac{\mu}{4}$ e $5\frac{\mu}{4}$	0.158	79	75
$5\frac{\mu}{4}$ e $6\frac{\mu}{4}$	0.105	52	49
$6\frac{\mu}{4}$ e $7\frac{\mu}{4}$	0.058	29	30
$7\frac{\mu}{4}$ e $8\frac{\mu}{4}$	0.029	15	17
$8\frac{\mu}{4}$ e ∞	0.018	9	9

Altre esperienze, sulle quali non possiamo intrattenerci, come ad es. quelle che si riferiscono alla teoria quantitativa di Einstein sui moti browniani, alle estensioni a scienze diverse delle considerazioni fatte, danno una base sperimentale solida alla teoria cinetica della materia.

16. *Determinazione di alcune grandezze molecolari* — Cerchiamo qui, per mezzo di qualche esempio, di mettere in evidenza l'importanza del numero N_A di Avogadro. Occupandoci dei gas noi non potevamo determinare la costante K [formula (68)]. Potemmo invece determinare la costante (77)

$$R_A = N_A . K \tag{111}$$

che si riferisce al volume di una molecola-grammo di gas.

Possiamo ora scrivere, in base al numero N_A da noi considerato:

(112) $K = 8.32 \times 10^7 : 68.2 \times 10^{22} = 12.2 \times 10.^{-17}$

Il numero di Avogadro permette di determinare il peso di una molecola di una sostanza quando di questa si conosca il peso molecolare.

Poichè, ad es. una molecola-grammo di ossigeno e una molecola-grammo di idrogeno valgono rispettivamente gr. 16 e gr. 2.02, si ha rispettivamente per il peso di una molecola, dividendo i grammi anzidetti per $N_A = 68.2 \times 10^{22}$,

(113) gr. 4.69×10^{-23}, gr. 2.96×10^{-24}

e per i pesi di un atomo di ossigeno e di idrogeno, rispettivamente:

(114) gr. 2.34×10^{-23}, gr. 1.48×10^{-24}.

Determiniamo il valore dell'energia *totale* media di traslazione. Essa è fornita, per la (67),

(115) $$\frac{1}{3} m\,(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) = K.\,T,$$

da

(116) $$E = \frac{3}{2} K.T.$$

Calcolata per $T = 273°$, risulta in *ergs*:

(117) $$E = 0.5 \times 10.^{-13}$$

Determiniamo la quantità di elettricità che contiene *l'atomo di elettricità*. Consideriamo una soluzione di cloruro di sodio *NaCl*. È noto che bisogna una quantità di elettricità di 96,550 coulombs per scomporre una molecola-grammo di cloruro nei due ioni $\overset{+}{Na}\overset{-}{Cl}$ e che l'atomo di elettricità è quella parte di elettricità che porta un ione monovalente.

Risulta, dunque, per questo atomo, in coulombs:

(118) $$\frac{96{,}550}{68.2 \times 10^{22}} = 1415 \times 10.^{-22}$$

17. *Il calcolo delle probabilità e il secondo principio della termodinamica* — Ricordiamo come il lavoro si trasformi in calore, e viceversa, sotto certe condizioni.

Fissiamo l'attenzione su ciò che avviene *osservando* il moto browniano dei granuli sospesi in un liquido che si trovi in equilibrio termico, sottratto a qualsiasi influenza che non sia la gravità. Noi pensiamo qui soltanto ai fenomeni osservati, prescindendo da ipotesi teoriche.

Un granulo aumenta, ad un certo momento, la sua velocità, assume cioè una maggiore energia; contemporaneamente si osserva un altro granulo il quale diminuisce la sua energia.

Ciò non contraddice al principio della conservazione della energia: un granulo aumenta la sua energia e raffredda per questo il liquido circostante il quale si riscalda, d'altra parte, poichè vi è un granulo che comunica parte della sua energia al liquido stesso. Ciò che desumiamo è che *l'equilibrio termico non è che un equilibrio statistico.*

Peró l'osservazione dei moti browniani può far sollevare dei dubbi circa la validità del secondo principio della termodinamica. Consideriamo infatti un granulo della emulsione il quale, per quanto si è detto, si trova in un mezzo che è in equilibrio termico. Or bene questo granulo, ad un certo momento, *spontaneamente*, senza cioè che agiscano forze esterne al recipiente, diverse dalla gravità, che sono escluse da esperienze accuratamente fatte, si eleva, cioè trasforma *spontaneamente* calore in lavoro meccanico in un mezzo che è in equilibrio termico. Un tal fatto dà a pensare di potere risolvere un problema di questo genere: Considerando un piroscafo sul mare, cioè in un ambiente in equilibrio termico, si potrebbe far muovere il piroscafo con un apparecchio che trasformi, senza ripercussioni esteriori, il calore del mare in energia cinetica del piroscafo; considerata la grande quantità di energia che potrebbe fornire il mare si potrebbe far muovere a piacere il piroscafo senza alcuna spesa.

Or bene è noto che questo problema è dichiarato irresolubile dal secondo principio della termodinamica, il quale afferma che non può esistere un tale apparecchio in un ambiente che si trovi in equilibrio termico.

Senonchè questo postulato che veniva enunciato come verità assoluta ha dovuto cambiare forma ed assumere forma probabilistica, in seguito alle concezioni della teoria cinetica della materia. Fermiamoci sui moti browniani.

Perchè questi, *dal punto di vista pratico*, potessero smentire il valore pratico del principio di Clausius-Carnot, bisognerebbe che potessero essere coordinati, resi paralleli. Un granulo, ad es., non vince la gravità, non innalza cioè il suo peso, che per un tratto microscopico, praticamente insignificante. Si avrebbe un lavoro praticamente sensibile se mantenendo, con un mezzo qualsiasi, il liquido a una temperatura costante, tutti i granuli, o la maggior parte di essi, potessero coordinare, *per parecchio tempo*, il loro moti verso l'alto. Si avrebbe allora trasformazione, in un ambiente a temperatura costante, di calore in lavoro sensibile e regolato. Ma se noi vediamo ora l'accordo che vi è tra le ipotesi teoriche fatte e i risultati dell'esperienza, come cioè predomini il *caso* nei moti browniani, dobbiamo concludere che è *estremamente improbabile* che i moti browniani, in un ambiente isotermo, possano produrre un lavoro praticamente sensibile.

Il secondo principio della termodinamica resta, ma la teoria cinetica della materia gli ha tolto quel carattere incondizionato che aveva: la sua validità non è assolutamente certa ma è praticamente certa.

18. *Conclusione* — Da quanto è stato detto può intuirsi la importanza che hanno assunto, in questi ultimi tempi, nella fisica tanto il calcolo delle probabilità, che ha fornito ipotesi di lavoro atte a dar ragione di certi fenomeni osservati e a far previsioni su fenomeni non ancora osservati, quanto l'osservazione statistica di certe grandezze, strettamente collegate nella fisica molecolare, resa necessaria dal cimento delle ipotesi fatte.

A meglio intendere questa considerazione si rende opportuno rilevare che le ricerche del genere qui indicato, ampliate, estese ai liquidi e ai solidi, e in scienze diverse, costituiscono oggi un campo di studi che è tra le più grandi conquiste scientifiche.

F. P. Cantelli.

† Ridolfo Livi

13 luglio 1856 – 12 aprile 1920

Metron ha il dolore di annunciare, già nel suo primo numero, la scomparsa di uno che contava tra i suoi collaboratori più ambiti: il generale medico dott. Ridolfo Livi. Chi scrive ha incontrato poche volte nella propria vita una tempra più robusta di scienziato. La professione di medico nell'esercito italiano lo aveva indotto ad occuparsi presto di medicina e di antropologia militare; l'incarico del l'esecuzione dell'inchiesta antropometrica sui soldati italiani, conferitogli nel 1888, aveva offerto alle sue rare doti di studioso occasione di esplicarsi a pieno. I volumi, che ne risultarono, dell'*Antropometria militare*, compilati sotto la sua direzione e preceduti da sue dense introduzioni, costituiscono un'opera monumentale, vanto della statistica italiana e fonte preziosa di dati per ognuno che si occupi di antropologia e di statistica. In Italia ed all'estero, essi gli procurarono fama ed onori meritati, che le opere posteriori confermarono ed accrebbero.

Una grande calma ed obbiettività di ricerca, la tendenza a correre diritto ai risultati decisivi coi procedimenti più semplici, senza lasciarsi distrarre da discussioni preliminari o da ricerche laterali, uno sforzo costante a precisare la portata dei vari fattori sui fenomeni in esame, spingendone, senza sottigliezze, l'analisi quantitativa quanto più oltre la natura della ricerca permetteva e una singolare ingegnosità, aliena però sempre da artificio, nell'escogitare i mezzi per raggiungere lo scopo, una coscienziosa precisione e una minuziosa cura anche dei particolari, costituiscono doti spiccate della sua mente e danno alla sua produzione scientifica un'impronta caratteristica. Certamente, qualora le occupazioni della professione non avessero assorbito buona parte del suo tempo e non avessero contribuito a trattenere su pochi argomenti la sua attività scientifica, anche maggiori sarebbero stati i contributi che a lui deve la scienza.

Nell'ultimo periodo della sua vita, egli aveva lasciato un po' da parte le faticose ricerche a base di elaborazioni statistiche per darsi di preferenza ad indagini storiche, di cui pure non trascurava gli aspetti quantitativi. Al *Metron* egli aveva promesso appunto una coordinata esposizione dei dati raccolti per l'opera, che stava preparando, sopra la schiavitù domestica nel Medio-Evo e dopo. Ho fiducia che gli appunti lasciati permettano al figlio Livio, docente di Statistica nella R. Università di Modena, di assolvere, in sua vece, l'impegno.

Ho ritenuto di far opera utile alla scienza e doverosa verso la memoria dell'estinto chiedendo alla famiglia, per la pubblicazione, i brevi cenni che seguono su la vita e le opere di lui.

CORRADO GINI

CENNI SULLA VITA

Nacque a Prato il 13 Luglio 1856 dal Prof. Carlo Livi (che fu Direttore dei Manicomi di Siena e di Reggio Emilia e professore di psichiatria nella università di Siena e di Modena) e da Giuseppina Costantini. Passato alla fine del 1858 a Siena, nuova sede della famiglia, vi compiva i primissimi studi. Nel Novembre del 1865 entrava convittore nel Collegio Cicognini di Prato, ammesso alla 2ª ginnasiale, e ne usciva nell'Agosto del 1870 dopo aver superato gli esami di ammissione alla 2ª liceale. Ultimava gli studi liceali in Siena dove pure, nel 1872, iniziava presso quella università gli studi di medicina, studi ché furono da lui continuati nelle università di Modena, di Torino e, per ultimo, di Pavia, ove conseguiva la laurea con pieni voti il 10 Luglio del 1878.

Nell'anno stesso iniziava la carriera di medico militare.

Nominato sottotenente nell'Ottobre del 1878 fu promosso successivamente tenente nel 1880, capitano nel 1885, maggiore nel 1900, tenente colonnello nel 1908, colonnello nel 1912 e maggior generale nel 1917.

Fece le due campagne d'Africa del 1887 e 1888. Dopo l'infausta giornata di Dogali veniva insignito di " motu proprio sovrano „ della croce di Cavaliere della Corona d'Italia " per l'opera intelligente ed indefessa spiegata nel prestare le prime cure ai feriti „ (R.° Decreto 27 Febbraio 1887).

Destinato sul finire del 1888 all'Ispettorato di Sanità Militare, vi rimaneva fino al Dicembre del 1912 per passare poi a Firenze a dirigere la Scuola di applicazione di sanità militare.

Scoppiata la guerra fu dapprima nominato Direttore di Sanità del Corpo d'Armata Territoriale di Firenze, poi inviato in zona di guerra quale Direttore di Sanità della zona Carnia e poi quale Direttore di Sanità della Sesta Armata.

Con la sua promozione a maggior generale tornava all'Ispettorato di Sanità Militare. La morte quasi improvvisa lo colse a Firenze nelle prime ore del 12 Aprile 1920 mentre attendeva che fosse accolta una sua domanda di invio in posizione ausiliaria.

In questi ultimi tempi infatti il suo desiderio più grande era quello di tornare a fare vita tranquilla con i suoi e di occuparsi esclusivamente dei suoi prediletti studi di storia e di antropologia.

Ma, nonostante le gravi occupazioni militari, egli non trascurò mai questi studi. Per i suoi due lavori giovanili *Sulla statura degli Italiani* e *L'indice cefalico degli Italiani* veniva onorato del premio Godard e di una medaglia di argento dalla *Societé d'Anthropologie de Paris.* Per la fama che già si veniva procurando in questo campo scientifico gli veniva affidata, nel 1888, dall'Ispettorato di Sanità Militare, l'esecuzione di una grandiosa inchiesta antropometrica sopra circa 300 000 militari dell'esercito. Quest'opera, ultimata nel 1905, costituisce la più importante raccolta di notizie antropologiche che sia mai stata compiuta in Italia o all'estero.

TITOLI SCIENTIFICI ED ACCADEMICI

1888 - Membro corrispondente della *Société d'Anthropologie de Paris.*

1889 - Membro onorario dell'*Anthropological Institute of Great Britain* (Londra).

1890-1912 - Redattore capo del *Giornale di Medicina militare.*

1891-92 - Vice-presidente per il biennio della *Società Italiana di Antropologia* (Firenze).

1893 - Membro fondatore della *Società Romana di Antropologia.*

1894 - Membro " associé „ della *Société d'Anthropologie de Paris.*

1896 - Onorato dal premio Godard e di una medaglia di argento della suddetta Società per le opere *Sulla statura degli Italiani* e *L'indice cefalico degli Italiani.*

1896 - Membro corrispondente della *Reale Accademia di Medicina di Madrid.*

1896 - Membro della *Société française d'Hygiène* (Parigi).

1897 - Diploma d'onore, premio e medaglia, al concorso scientifico annesso all'esposizione internazionale di Bruxelles per i lavori su *La geografia antropologica d'Italia.*

1897 - Incaricato dal Ministero dell'interno degli *Studi e lavori preparatori per la istituzione del servizio antropometrico per la identificazione dei delinquenti.*

1897 - Membro dell'*Istituto internazionale di Statistica.*

1897 - Membro della *Società di Antropologia di Bruxelles.*

1897-98 - Vice-presidente per il biennio della *Società Italiana di Antropologia* (Firenze).

1900 - Delegato del Governo Italiano alla *Commissione Internazionale per la nomenclatura delle cause di morte* (Parigi 1900).

1903 - Membro della *Società Svedese di Antropologia e Geografia* (Stockholm).

1903-04 - Vice Presidente per il biennio della *Società Italiana d'Antropologia* (Firenze).

1903-04 - Presidente per il biennio della *Società Romana di Antropologia.*

1907 - Membro della *Società Italiana per il progresso delle Scienze.*

1908 - Membro dell'*Istituto Nazionale per l'incremento dell'educazione fisica in Italia.*

1909 - Abilitato per titoli alla *libera docenza in Antropologia*, presso l'Università di Roma.

1913 - Socio onorario della *Deutsche Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte.*

1913 - Membro del *Consiglio Superiore di Statistica* (presso il Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio).

1915 - Membro della *Società Colombaria di Firenze.*

dal 1915 - Presidente della *Società Italiana di Antropologia* (Firenze).

1919 - Membro della *Società Italiana di Genetica ed Eugenica* (Roma).

PUBBLICAZIONI

1 - *Il morbillo nell'esercito ed in particolare di una epidemia dominata nel presidio di Firenze nel 1880.* Estratto dal " Giornale di medicina militare „ 1882, Roma, Voghera Carlo 1882, pag. 21.

2 - *Sulla statura degli Italiani.* In " Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia „ Vol. XIII° 1883. pag. 46, con due tavole.

3 - *Sulla statura degli Italiani, Studio statistico antropologico.* Firenze, coi tipi dell'Arte della Stampa, 1884, pag. 116 e 3 tavole (1).

4 - *Delirio* In „ Enciclopedia medica italiana „. Vol. III. Milano, Vallardi 1884.

5 - *L'Indice cefalico degli Italiani.* Firenze, Tipografia dell'Arte della Stampa, 1886, pag. 84 e 2 tavole.

6 - *Sur la manière de calculer les indices en Anthropologie.* Lettera al Direttore dell'" Anthropologie „, anno 1887.

7 - *Sullo sviluppo del dente del giudizio.* Estratto dagli " Atti della Società Romana di Antropologia „ Vol. 1, fasc. 2°, 1894, Torino, Stab. Tipografico Pietro Bruno, 1894.

8 - *Contributo alla geografia antropologica d'Italia. Carte della distribuzione dei biondi e dei bruni.* Estratto dall'" Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia „. Vol. XXIV°, fasc. 2, 1894, pag. 20 e 2 carte.

9 - *Saggio dei risultati antropometrici ottenuti dallo spoglio dei fogli sanitari della classe 1859-63,* presentato in omaggio ai membri della XIV^a sezione dell'XI congresso medico internazionale, Roma, C. Voghera, 1894, pag. 48 e 6 carte.

10 - *Le malattie veneree secondo i mesi. Nota demografica.* Estratto dal " Giornale medico de R° Esercito e della R^a Marina „ 1896, pag. 22 e 1 tavola.

11 - *Anthropologie de la France, Dordogne, Charente, Corrèze, Haute, Vienne,* par R. COLLIGNON (articolo bibliografico). Estratto dagli " Atti della Società Romana d'Antropologia „ Vol. 2, fasc. 2°, 1895, pag. 6.

12 - *Sulla interpretazione delle curve seriali in Antropometria.* Estratto dagli „ Atti della Società Romana di Antropologia „ Vol. III, fasc 1°, 1895, pag. 34.

13 - *Geografia ed orografia della statura e del colore degli occhi e dei capelli in Italia* Estratto dall'" Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia „ Vol. XXVI°, fasc. 1°, 1896. Firenze, Tip. Landi, 1896.

14 - *Antropometria militare; Risultati ottenuti dallo spoglio dei fogli sanitari dei militari delle classi 1859-63* (2 volumi e un atlante).

- (1° volume) parte prima. *Dati Antropologici ed etnografici.* Roma, presso il " Giornale medico del R° Esercito „ 1896, pag 609.

- (2° volume) parte seconda. *Dati demografici e biologici.* Roma, presso il " Giornale medico del R° Esercito „ 1905, pag. VIII-409 con 8 tavole geografiche.

- *Atlante della geografia antropologica d' Italia,* Roma, presso il " Giornale medico del R° Esercito „ 1896, (23 tavole e carte).

15 - *Saggio di geografia del militarismo in Italia.* Estratto dalla " Riforma sociale „ fasc 6°, anno IV, vol. VII°, seconda serie, Torino, Roux Frassati e C°, 1897, pag. 12.

16 - *Dello sviluppo del corpo (statura e perimetro toracico) in rapporto con la professione e con la condizione sociale.* Roma, Voghera, 1897, pag. 40 e 5 tavole.

17 - *La distribuzione geografica dei caratteri antropologici in Italia.* Estratto dalla " Rivista italiana di Sociologia „ anno II, fasc. IV°, Luglio 1898, Scansano, Tip. degli Olmi, 1898, pag. 19.

18 - *L' Indice ponderale o rapporto tra la statura e il peso,* Estratto dagli " Atti della Società Romana di Antropologia „ vol. V°, fasc. II°, Lanciano. 1898, pag. 30.

19 - *L' indice pondéral ou rapport entre la taille et le poids* (traduzione del precedente lavoro) In " Archives Italiennes de Biologie „ Tomo XXXII°, fasc. II° Torino 1899.

20 - *Communication relative à une enquête anthropométrique militaire en Italie.* Estratto dal « Bull. de l' Inst. Int. de Statistique ». Tome XI I.^{ere} livr. 1899, pag. 76-92.

21 - *La vaccinazione nell' esercito e l' antivaccinismo.* Estratto dal " Giornale medico del R° Esercito „ Gennaio - Febbraio 1899, pag. 45..

22 - *La vaccinazione nell' Esercito e l' antivaccinismo.* Seconda ed ultima edizione, Roma, Enrico Voghera, 1899, pag. 83.

23 - *La vaccination et la variole dans l' armée italienne.* Extrait de la " Revue d'hygiène „ Mars 1899, Paris, Masson et Cie, 1899, pag. 22.

24 - *Pocken und Impfung in der italienischen Armee.* Separatabdruck aus der " Hygienischen Rundschau „ 1899, n° 12, pag. 14.

25 - *Taille et perimètre thoracique des militaires en rapport avec les professions*, Comptes rendus du XII[e] " Congrès international de Médecine „ Moscou, Août 1897, Moscou, Soc. de l'Imprim. S. P. Yakovleu, 1900.

26 - *Antropometria* (*Metodologia antropometrica - Alcune leggi antropometriche - Identificazioni antropometriche - Tavole di calcoli fatti)*, Milano, Hoepli, 1900, pag. 237, con 33 incisioni.

27 - *Taille et professions*, Comunicazione al " Congresso internazionale di demografia „ di Parigi, 1900.

28 - *Des moyens par lesquels l'armée peut contribuer à l'avancement de la démographie*, Comunicazione al " Congresso internazionale di demografia „ di Parigi 1900.

29 - *Il primo cinquantenario di vita del Giornale medico del R° Esercito*, Estratto dal " Giornale medico del R° Esercito „ Gennaio 1903, Roma, E, Voghera, 1903, pag. 10.

30 - *Enquête anthropologique et sanitaire sur l'armée italienne*, Extrait des " Comptes rendus de l'association française pour l'avancement des sciences „ Congrès de Cherbourg, Paris, Sécrétariat de l'Association, 1905, pag. 8.

31 - *Misurando e rimisurando, Note di antropometria militare*. Estratto dalla " Rivista Militare Italiana „ Dispensa, IX anno, 1905, Roma, E Voghera, 1905, pag. 22.

32 - *La condizione sociale e lo sviluppo fisico*. Estratto dalla " Rivista Italiana di Sociologia „ Anno IX°, fasc. V°-VI°, dicembre 1905, Scansano, Tip. Ed. degli Olmi, 1905, pag. 32.

33 - *Per Cesare Lombroso (Nota commemorativa)* " Giornale medico del R° Esercito „ Aprile 1906.

34 - *La necessità della ginnastica dimostrata dalla bilancia e dal metro*. In " Audax; Rivista mensile di Sport „ Anno 1907.

35 - *La schiavitù medioevale e la sua influenza sui caratteri antropologici degli Italiani*. Estratto dalla " Rivista Italiana di Sociologia „ Anno XI°, fasc. IV°-V°, 1907, pag. 27.

36 - *L'esclavage domestique au moyen âge et son importance en anthropologie*. Extrait des " Bullettins et Memoires de la Société d'anthropologie de Paris „ Jubilé du cinquantenaire, pag. 11.

37 - *Sulla causa del destrismo e mancinismo*. Estratto dagli " Atti della Società Romana di Antropologia „ Vol. XIV°, fasc. 1°, Roma, 1908.

38 - *Una relazione economico-politica sulla città e stato di Siena alla fine del secolo XVII*. Estratto dal " Bullettino Senese di Storia Patria „ Anno XV°, fasc. II°, 1908, Siena, L. Lazzari, 1908, pag. 20.

39 - *La schiavitù domestica in Italia nel Medio Evo e dopo*. Comunicazione fatta alla " Sezione di Antropologia ed Etnologia della seconda riunione della società Italiana per il progresso delle scienze „ Firenze, Ottobre 1908, Estratto dall'" Archivio per l' Antropologia e l'Etnologia „ Vol. 38°, fasc. III°, 1908, pag. 14.

40 - *L'Antropologia nei suoi rapporti con la Medicina sociale*. Milano, Dott. F. Vallardi, 1910, pag. X-356.

41 - *Sulla utilità dei minimi antropometrici nella scelta del soldato*, Estratto dal " Giornale di Medicina militare „ Aprile 1911, Roma, E. Voghera, 1911, pag. 15.

42 - *Ueber den Nutzen anthropometrischer Grenzwerte für die Assentierung*, Separatabdruck aus der " Militärarzt „ N° 1, 1911 Wien, Moritz Perle, 1911, pag. 14.

43 - *San Bernardino da Siena e le sue prediche secondo un suo ascoltatore pratese nel 1424* Estratto dal " Bullettino senese di storia patria „ Anno XX°, fasc. III°, 1913, Siena, Stab. art. graf. Lazzeri, 1913, pag. 14.

44 - *Guido da Bagnolo, medico del re di Cipro (con nuovi documenti)*. Estratto dagli " Atti e Memorie della R. Deputazione di storia patria per le provincie modenesi „ Serie V. Vol. XI°, 1916, Modena, Società Tip. Mod. 1916, pag. 50.

45 - *Cronachella pratese del 1500 - Giove veduto di giorno - Un pratese hidalgo spagnuolo*. In corso di pubblicazione nell'" Archivio storico pratese „.

46 - *Commemorazioni, discorsi, articoli* in Giornali e Riviste diversi.

47 - Era in corso di pubblicazione una grandiosa opera che doveva intitolarsi:

- *La schiavitù domestica nel Medio Evo e dopo (ricerche storiche di un antropologo)*.

Ne era completata ormai la raccolta delle fonti ed iniziata l'estensione del testo. La parte svolta ed i documenti verranno pubblicati a cura della famiglia.

Libri ricevuti

MINISTÈRE DE L' INDUSTRIE ET DU TRAVAIL. *Recensement de l' Industrie et du Commerce.* (31 Décembre 1910) - Première partie: *Recensement professionnel,* Vol. I, II, III, IV, Bruxelles, 1913. - Deuxième partie: *Recensement industriel,* Vol. V, VI, Bruxelles, 1919. - Troisième partie: *Recensement du commerce,* Vol. VII, Bruxelles, 1919.

MINISTERO PER LE TERRE LIBERATE. UFFICIO CENSIMENTO. *Censimento dei profughi di guerra.* Roma, 1919. Tipografia del Ministero dell' Interno.

BRAGANTE AGOSTINO, *Gerente responsabile.*

METRON is published quarterly, the four numbers making a volume of 700 to 800 pages in all. It accepts original articles on statistical methods and on the application of statistics to the different spheres of activity, and reviews or discussions of results obtained by statistical methods in various fields of science, or such material as may be of interest to the statistician.

A bibliography is annexed of all works or Reviews presented or received in exchange. Articles and reviews may be written in English, Italian, French or German. Manuscripts in English, French or German should be type-written. Contributors will receive gratuitously 25 copies of works of theirs published.

Manuscripts submitted for publication should be addressed to *Prof. Corrado Gini, Dept. of Statistics, University of Padova (Italy)*, or to the member of the Editorial Committee who represents the writer's country. Contributors are requested to retain a copy of manuscripts sent, as, in case of non acceptance, the Editors will not be responsible for safe return of the original.

Proposals for exchange made by Reviews or other periodicals, and all publications sent in exchange or as complimentary copies, should be addressed to Prof. Corrado Gini.

Subscription forms should be addressed to the *Industrie Grafiche Italiane, Rovigo (Veneto), Italy.*

The subscription rate is **50 lire** per year . Single copies **15 lire** each.

METRON erscheint jährlich in vier Heften, im Umfang von 700-800 Seiten.

METRON enthält Artikel statistischer Methodologie, sowie andere Artikel über die Anwendung für die verschiedenen Disziplinen, ferner Uebersichten oder Erörterungen über die hauptsächlichen Resultate, welche mit der statistischen Methode auf den verschiedensten Gebieten der Wissenschaft erreicht worden sind, und Studien die ein besonderes Interesse für den Statistiker haben können.

METRON veröffentlicht auch das Verzeichnis aller zum Tausch oder ehrenhalber erhaltenen Werke und Rundschauen. Die Artikel und die Uebersichten können in Italienisch, Französisch, Englisch und Deutsch verfasst sein. Die französischen, englischen und deutschen Artikel müssen auf der Maschine geschrieben sein.

Jeder Verfasser wird, nach Veröffentlichung seines Artikels, 25 Sonderabzüge desselben unentgeltlich erhalten.

Die Manuskripte der zu veröffentlichenden Artikel sind direkt an *Herrn Prof. Corrado Gini, Gabinetto di Statistica, R. Università di Padova (Italien)*, oder durch Vermittlung des Komitee-Mitglieds, welches den Staat des Mitarbeiters vertritt, zu senden. Man ersucht die Verfasser, eine Kopie des an die Rundschau gesandten Manuskriptes zu behalten, da die Redaktion im Falle der Nicht - Veröffentlichung des Artikels die Zurücksendung des Manuskriptes nicht versichert.

Tauschofferten anderer Rundschauen oder Zeitschriften und alle der Rundschau zum Tausch oder ehrenhalber zugesandten Veröffentlichungen, sowie die für die Recension bestimmten Werke sind an Herrn Prof. Corrado Gini zu richten.

Alle Abonnements - Anfragen müssen an die *Industrie Grafiche Italiane, Rovigo (Veneto), Italien,* gerichtet werden.

Jahresbezug **50 lire** - Sonderheft **15 lire**.