METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *direttore dell'Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *prof. de Science des finances à l'Université d'Athènes* (Grèce).
Prof. F. Bernstein, *Direktor des Instituts für mathematische Statistik der Universität, Göttingen* (Deutschland).
Prof. A. E. Bunge, *director general de Estadística de la Nación, Buenos Aires* (Argentina).
Prof. F. P. Cantelli, *professore di Matematica Attuariale nel R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Napoli* (Italia).
Prof. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund* (Schweden).
Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadística del Ministerio de Hacienda, Madrid* (España).
Prof. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London* (England).
Dott. G. Jahn, *directeur du Bureau Central de Statistique de Norvège, Oslo* (Norvège).
Prof. A. Julin, *secrétaire général honoraire du Ministère de l'Industrie et du Travail et de la Prévoyance sociale, Bruxelles* (Belgique).
Ing. L. March, *directeur honoraire de la Statistique générale de la France, Paris* (France).
Prof. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique, La Haye* (Pays-Bas).
Prof. R. Pearl, *director of the department of Biology of the School of Hygiene and Public Health, Baltimore* (U. S. A.).
Prof. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen* (Denmark).

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, *Istituto di Statistica della R. Università di Roma.*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE

Prof. Luigi Galvani — Dott. Mario Saibante

Vol. X - N. 3. **30-IX-1932.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

F. Bernstein. *Die mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente und ihre Anwendung auf Funktionen der Potenzmomente* . . . . . Pag. 3
R. Frisch. *On the use of difference equations in the study of frequency distributions* . . . . . » 35
L. Galvani. *Sulle curve di conentrazione relative a caratteri limitati e non limitati* . . . . . » 61
W. Dowell Baten. *Frequency Laws for the Sum of* n *Variables which are Subject each to given Frequency Laws* . . . . . » 75
H. Sonnabend. *Note preliminari di demografia africana* . . . . . » 93
C. A. Grillenzoni. *I caratteri del fisico e del vestire come fattori demografici* . . » 131
M. J. Van Uven. *Compensazione degli errori di un rapporto* . . . . . » 185

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.

(Secondo l'ordine d'arrivo).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(D'après la date de reception).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(Nach der Reihenfolge des Eingangs)

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHEED IN FUTURE ISSUES.

(According to date of receipt)

Curtis Bruen. *Five Variable Straight Line Diagram.*

V. Castellano. *Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione.*

P. Lorenz. *Ueber Näherungs-parabeln hohen Grades und ihre Aufgabe in der Konjunkturforschung.*

T. Salvemini. *Sulla interpolazione grafica di istogrammi.*

G. Gini, M. Boldrini, L. Galvani, A. Venere. *Sui centri della popolazione e sulle loro applicazioni.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articcli stessi, qualora vengano pubblicati.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue, pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriéte littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

The Authors of papers sent for publication in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätzs, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

FELIX BERNSTEIN

Die mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente und ihre Anwendung auf Funktionen der Potenzmomente

§ 1. Die Potenzmomente als Stieltjessche Integrale.

In den folgenden Paragraphen werden wir den Stieltjesschen Integralbegriff mit grossem Nutzen verwenden. Wir wollen deshalb die Potenzmomente als Stieltjessche Integrale schreiben. Für den Fall zweier Variabeln werden wir nachher eine Einführung des Stieltjesschen Integralbegriffs vornehmen. Im Falle einer Variabeln setzen wir ihn als bekannt voraus (1).

Das n-te empirische Signumpotenzmoment ist definiert als

$$P_{|n} = \frac{S\,(x - \bar{x})^n \operatorname{sg}\,(x - \bar{x})}{N}.$$

Dabei bedeutet N die Anzahl aller Beobachtungen, S die Summe über alle Beobachtungen und $\bar{x}$ das arithmetische Mittel der beobachten x-Werte.

Den Wegfall des Signumfaktors deuten wir durch Fortlassung des Striches vor dem n an. Das signumfreie n-te empirische Potenzmoment ist also

$$P_n = \frac{S\,(x - \bar{x})^n}{N}.$$

(1) Der Leser findet die Entwicklung des Stieltjesschen Integralbegriff für eine Variable bei STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues*, « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », Band VIII, Seite I 68 ff. [Vergleiche die kurze Einführung bei LOEWY, *Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik*, « Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete », Band 2, 1931, Seite 3 ff].

Wir schreiben $P_{|n}$ als Stieltjessches Integral

$$P_{|n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^n \operatorname{sg} (x - \bar{x}) \, d\omega_N(x) \, .$$

Die monoton wachsende (d. h. niemals abnehmende) Funktion $\omega_N(x)$ wird dabei auf folgende Weise erklärt. Unter den N beobachteten x-Werten, die wir uns der Grösse nach geordnet denken, befinde sich N_1 Male der Wert x_1, N_2 Male der Wert x_2 und N_k Male der Wert x_k, sodass $\sum_{\nu=1}^{k} N_\nu = N$ ist.

Dann setzen wir:

$$\omega_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{im Intervall } -\infty < x < x_1 \\ \dfrac{N_1}{N} & \text{» »} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ \dfrac{N_1 + N_2}{N} & \text{» »} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots\dots & \\ \dfrac{N_1 + N_2 + \dots + N_j}{N} & \text{» »} \quad x_j \leq x < x_{j+1} \\ \dots\dots\dots & \\ 1 & \text{» »} \quad x_k \leq x < +\infty \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass das obige Integral mit dem Summenausdruck für $P_{|n}$ identisch ist. Eine Ausnahme macht zunächst der Fall $n = 0$, worauf wir noch zurückkommen.

Wir nehmen an, dass die empirische Funktion $\omega_N(x)$ mit wachsendem N gegen eine theoretische Funktion $\omega(x)$ strebt, die von folgender Beschaffenheit ist. Wenn wir die Variable einmal mit ξ bezeichnen und x ein beliebiger, aber fester Wert der Variablen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\xi < x$ ist, durch $\omega(x)$ gegeben. $\omega(x)$ ist demnach ebenso wie $\omega_N(x)$ eine monoton wachsende Funktion, die an der Stelle $-\infty$ den Wert 0, und an der Stelle $+\infty$ den Wert 1 hat. Wenn eine stetige a priorische Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x)$ vorhanden ist, was wir aber nicht voraussetzen, so ist

$$\omega(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi) \, d\xi \, .$$

Das theoretische Potenzmoment $p_{|n}$ ist definitionsgemäss

$$p_{|n} = [(x - x^0)^n \operatorname{sg} (x - x^0)]^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x^0)^n \operatorname{sg} (x - x^0) \, d\omega(x) \, ,$$

wenn x^0 der wahrscheinliche wert von x ist.

Wir nehmen an, dass dieses Stieltjessche Integral für jedes ganzzahlige $n \geqq o$ existiert.

Wenn $n = o$ ist, ist der Intregrand sg $(x - x^o)$ an der Stelle $x = x^o$ unstetig. Damit $p_{|0}$ trotzdem existiert, genügt es, anzunehmen, dass $\omega (x)$ an der Stelle x^o stetig ist.

Wir werden diese Stetigkeitsforderung später noch so verschärfen, dass wir sicher sind, dass das empirische Potenzmoment $P_{|o}$ bis auf einen Fehler, den wir vernachlässigen können, eindeutig definiert ist.

Wir wenden uns jetzt den Potenzmomenten in zwei Variabeln zu und übertragen zunächst den Stieltjesschen Integralbegriff auf zwei Dimensionen.

Der Funktion $\omega (x)$ bei einer Dimension entspricht jetzt eine Funktion $\omega (x, y)$ von folgender Beschaffenheit: Es seien ξ und η die Variabeln; dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt $P (\xi, \eta)$, in den durch $\xi < x, \eta < y$ bestimmten Quadranten fällt, durch $\omega (x, y)$ gegeben. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt $P (\xi, \eta)$ in ein Rechteck mit den Eckpunkten (x, y), $(x + \Delta x, y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ und $(x, y + \Delta y)$ fällt, durch

$$\omega (x + \Delta x, y + \Delta y) - \omega (x, y + \Delta y) - \omega (x + \Delta x, y) + \\ + \omega (x, y) = \Delta \omega (P)$$

gegeben, wenn Δx und Δy positive Grössen sind. Dabei gelten die linke und die untere Kante mit Ausnahme ihrer nicht gemeinsamen Endpunkte als zum Rechteck gehörig, die rechte und die obere Kante als nicht zum Rechteck gehörig. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit physikalisch als Gewicht deuten, so ist $\Delta \omega (P)$ einfach das Gewicht des betrachteten Rechtecks, und auf die ganze Ebene ist dann das Gewicht I verteilt.

Wir beschränken unsere Betrachtung jetzt auf ein achsenparalleles Rechteck R, welches durch $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$ gegeben ist. Dieses Rechteck sei durch Parallelen zu den Koordinatenachsen in s kleine Rechtecke zerlegt. In jedem Rechteck wählen wir einen bestimmten Punkt; er heisse P_ν im ν-ten Rechteck. Das Gewicht des ν-ten Rechtecks werde mit $\Delta \omega (P_\nu)$ bezeichnet. Wenn Randpunkte des Rechtecks R zugleich Randpunkte eines kleinen Rechtecks sind, so sollen sie auch als zum kleinen Rechteck gehörig gelten. Ein Randpunkt von R, welcher Eckpunkt von zwei kleinen Rechtecken ist, soll zum rechten oder oberen kleinen Rechteck gehören. $f (x, y)$ sei eine im ganzen Rechteck R einschliesslich des Randes stetige Funktion. $f(x_\nu, y_\nu)$ ist ihr Wert im Punkte $P_\nu = P(x_\nu, y_\nu)$. Es lässt sich jetzt genau so wie beim Riemannschen Integral mit zwei Veränderlichen zeigen, dass

$$\sum_{\nu=1}^{s} f(x_\nu, y_\nu)\,\Delta\,\omega(P_\nu)$$

einem Grenzwert zustrebt, wenn die grösste Seite jedes der kleinen Rechtecke gegen o geht. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als Stieltjessches Integral der Funktion $f(x, y)$, erstreckt über das ganze Rechteck R, und wir schreiben dafür

$$\iint_R f(x, y)\,d\,\omega(P) \quad \text{oder auch} \quad \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\,d\,\omega(P)\,.$$

Wenn dieses Integral seinerseits einem Grenzwert zustrebt, wenn das gegebene Rechteck R auf die ganze Ebene ausgedehnt wird, so nennen wir diesen Grenzwert das über die ganze Ebene erstreckte Stieltjessche Integral und schreiben dafür

$$\iint_E f(x, y)\,d\,\omega(P)\,.$$

Von der Funktion $\omega(x, y) = \omega(P)$ ist bei den eben entwickelten Begriffen nichts weiter vorauszusetzen, als dass sie im betrachteten Rechteck R bezw. in der ganzen Ebene niemals abnimmt, wenn keine der Variabeln x und y abnimmt. Wir können sie als eine in den beiden Variabeln x und y monoton wachsende Funktion bezeichnen. Der Stieltjessche Integralbegriff lässt sich dann noch auf solche Funktionen ausdehnen, die sich als Differenz zweier in x und y monoton wachsender Funktionen darstellen lassen.

Wenn $f(x, y)$ an endlich vielen Stellen unstetig ist, so strebt $\sum_{\nu=1}^{s} f(x_\nu, y_\nu)\,\Delta\,\omega(P_\nu)$ trotzdem noch einem Grenzwert zu, wenn $\omega(x, y)$ an diesen Stellen auch die Eigenschaft der Stetigkeit besitzt. Also können wir auch in diesem Fall noch vom Stieltjesschen Integral $\iint_R f(x, y)\,d\,\omega(P)$ sprechen. Dasselbe gilt auch noch, wenn $f(x, y)$ in allen Punkten einer Strecke unstetig, aber $\omega(x,y)$ daselbst stetig ist.

Bei unseren wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen ist $\omega(x, y)$ die eingangs erklärte Funktion, die uns die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass ein Punkt $P(\xi, \eta)$ in der Viertelebene $\xi < x$, $\eta < y$ liegt. Aus diesem Grunde ist $\iint_E d\,\omega(x, y) = 1$. Da in Zukunft immer die ganze Ebene der Integrationsbereich ist, lassen wir hinfort den Buchstaben E beim Doppelintegral fort.

Die empirische Funktion $\omega_N(x, y)$ erklären wir auf die folgende Weise. Bei den N angestellten Beobachtungen möge sich N_1 Male der Punkt P_1, N_2 Male der Punkt $P_2, \ldots N_k$ Male der Punkt P_k ergeben haben, sodass $\sum_{\nu=1}^{k} N_\nu = N$ ist. Jeder beliebige Punkt $P(x, y)$ bestimmt eine Viertelebene, die aus allen Punkten $P(\xi, \eta)$ mit $\xi < x, \eta < y$ besteht. Wenn diese Viertelebene von den beobachteten Punkten $P_1, P_2, \ldots P_k$ keinen einzigen enthält, so setzen wir $\omega_N(x, y) = 0$. Wenn sie nur den Punkt P_{ν_1} enthalt, so setzen wir $\omega_N(x, y) = \frac{N_{\nu_1}}{N}$; wenn sie die Punkte P_{ν_1} und P_{ν_2}, aber keine weiteren Punkte enthält, so setzen wir $\omega_N(x, y) = \frac{N_{\nu_1} + N_{\nu_2}}{N}$. Allgemein setzen wir $\omega_N(x, y) = \frac{N_{\nu_1} + N_{\nu_2} + \ldots N_{\nu_j}}{N}$, wenn die betrachtete Viertelebene von den beobachteten Punkten gerade die Punkte $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots P_{\nu_j}$ und keine anderen beobachteten Punkte enthält.

Dann ist für jede stetige Funktion $f(x, y)$

$$\frac{S f(x, y)}{N} = \sum_{\nu=1}^{k} f(x_\nu, y_\nu) \frac{N_\nu}{N} = \iint f(x, y)\, d\,\omega_N(P)\,.$$

Die Signumpotenzmomente in zwei Variabeln x und y sind definiert als

$$P_{|n|m} = \frac{S\,(x-\bar{x})^n\,(y-\bar{y})^m\ \operatorname{sg}\,(x-\bar{x})\ \operatorname{sg}\,(y-\bar{y})}{N}\,.$$

Wenn einer oder beide Signumfaktoren fortfallen sollen, so deuten wir das dadurch an, dass wir in $P_{|n|m}$ den entsprechenden senkrechten Strich bezw. beide senkrechten Striche fortlassen.

$P_{|n|m}$ lässt sich als Stieltjessches Integral darstellen und ist

$$P_{|n|m} = \iint (x-\bar{x})^n\,(y-\bar{y})^m\ \operatorname{sg}\,(x-\bar{x})\ \operatorname{sg}\,(y-\bar{y})\, d\,\omega_N(P),$$

während das theoretische Signumpotenzmoment $p_{|n|m}$ definiert ist als

$$p_{|n|m} = \iint (x-x^0)^n\,(y-y^0)^m\ \operatorname{sg}\,(x-x^0)\ \operatorname{sg}\,(y-y^0)\, d\,\omega(P)$$

Die Existenz dieser Integrale lässt sich nicht ohne weiteres voraussetzen, wenn n oder m gleich 0 ist oder beide gleich 0 sind. Wir werden später hinreichende Stetigkeitseigenschaften von $\omega(x, y)$ voraussetzen, unter denen $p_{|n|m}$ auch in diesen Fällen existiert, und unter denen $P_{|n|m}$ in diesen Fällen bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler eindeutig bestimmt ist.

§ 2. Ein Variationsproblem bei Stieltjesschen Integralen.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Variation des Stieltjesschen Integrals

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x, \bar{x})\, g\,(x, \bar{x})\, d\,\omega_N\,(x)$$

zu bestimmen, wenn der Parameter $\bar{x}$ und die monotone Funktion $\omega_N\,(x)$ variert werden. Die Variation soll an der Stelle $\bar{x} = x^0$, $\omega_N\,(x) = \omega\,(x)$ vorgenommen werden. Deshalb setzen wir

$$\bar{x} = x^0 + \delta\,\bar{x}, \omega_N\,(x) = \omega\,(x) + \delta\,\omega\,(x)$$

$\delta\,\omega\,(x)$ ist als Differenz zweier monotoner Funktionen von beschränkter Variation. Die Integrationsgrenzen werden wir in Zukunft in der Regel fortlassen, wenn der Integrationsbereich die ganze x-Achse oder die ganze Ebene ist.

Von der Funktion $f\,(x\,,\bar{x})$ setzen wir voraus, dass sie nach $\bar{x}$ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann ist nach dem Taylorschen Satz unter Vernachlässigung des Restgliedes

$$(1) \qquad f\,(x\,,\bar{x}) = f\,(x\,,x^0) + f_{\bar{x}}\,(x\,,x^0)\,(\bar{x} - x^0)\,.$$

Es werden also Glieder von der Grössenordnung $(\bar{x} - x^0)^2$ vernachlässigt. $f\,(x\,,\bar{x})$ und $f\,\bar{x}\,(x\,,x^0)$ seine stetige Funktionen von x.

Die Funktion $g\,(x\,,\bar{x})$ sei für $x \neq \bar{x}$ ebenfalls eine stetige Funktion von x. An der Stelle $x = \bar{x}$ kann sie einen endlichen Sprung $h\,(\bar{x})$ besitzen. Für $x \neq \bar{x}$ sei $g\,(x\,,\bar{x})$ nach $\bar{x}$ zweimal stetig differenzierbar.

Infolgedessen gilt unter Vernachlässigung des Restgliedes hier ebenfalls die Taylorentwicklung:

$$(2) \qquad g\,(x\,,\bar{x}) = g\,(x\,,x^0) + g_{\bar{x}}\,(x\,,x^0)\,(\bar{x} - x^0),$$

wenn x nicht zwischen x^0 und $\bar{x}$ einschliesslich der Grenzen liegt.

Dabei sei $g_{\bar{x}}\,(x\,,\bar{x})$ für $x \neq \bar{x}$ auch eine stetige Funktion in x, und für $x = \bar{x}$ soll gelten $\lim\limits_{x \to \bar{x} - 0} g_{\bar{x}}\,(x\,,\bar{x}) = \lim\limits_{x \to \bar{x} + 0} g_{\bar{x}}\,(x\,,\bar{x})$, sodass $g_{\bar{x}}\,(x\,,\bar{x})$ also auch an der Stelle $x = \bar{x}$ stetig ist.

Wir bezeichnen den Wert des Integrals I an der Stelle $\bar{x} = x^0$, $\omega_N\,(x) = \omega\,(x)$ mit I^0.

Dann ist

$$I = \int f(x, \bar{x})\, g(x, \bar{x})\, d\,\omega(x) + \int f(x, x)\, g(x, \bar{x})\, d\,\delta\,\omega(x)$$
$$I^0 = \int f(x, x^0)\, g(x, x^0)\, d\,\omega(x)\,.$$

Damit die Integrale trotz der Unstetigkeit des Integranden existieren, setzen wir $\omega(x)$ und $\omega_N(x)$ in einer festen Umgebung von x^0, welche $\bar{x}$ enthält, als stetig voraus.

Es ist

$$\begin{aligned} I - I^0 = &\int [f(x, \bar{x})\, g(x, \bar{x}) - f(x, x^0)\, g(x, x^0)]\, d\omega(x) + \\ &+ \int [f(x, \bar{x})\, g(x, \bar{x}) - f(x, x^0)\, g(x, x^0)]\, d\,\delta\,\omega(x) + \\ &+ \int f(x, x^0)\, g(x, x^0)\, d\,\delta\,\omega(x)\,. \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann neben dem ersten vernachlässigt werden. Durch identische Umformung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} I - I^0 = &\int f(x, x^0)\,[g(x, \bar{x}) - g(x, x^0)]\, d\,\omega(x) + \int g(x, x^0)\,[f(x, \bar{x}) - \\ &- f(x, x^0)]\, d\,\omega(x) + \int [f(x, \bar{x}) - f(x, x^0)] \cdot [g(x, \bar{x}) - \\ &- g(x, x^0)]\, d\,\omega(x) + \int f(x, x^0)\, g(x, x^0)\, d\,\delta\,\omega(x). \end{aligned}$$

Wegen (1) kann das dritte Integral neben dem ersten vernachlässigt werden, so dass wir in erster Näherung für $I - I^0$

$$\begin{aligned} \delta I = &\int f(x, x^0)\,[g(x, \bar{x}) - g(x, x^0)]\, d\,\omega(x) + \int g(x, x^0)\,[f(x, \bar{x}) - \\ &- f(x, x^0)]\, d\,\omega(x) + \int f(x, x^0)\, g(x, x^0)\, d\,\delta\,\omega(x) \end{aligned}$$

erhalten.

Es ist

$$f(x, \bar{x}) - f(x, x^0) = \delta f(x, \bar{x}) = f_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\,\bar{x}\,.$$

Entsprechend setzen wir

$$g(x, \bar{x}) - g(x, x^0) = \delta\, g(x, \bar{x})\,.$$

Wenn x nicht zwischen x^0 und $\bar{x}$ liegt, ist nach (2)

$$\delta\, g(x, \bar{x}) = g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\,\bar{x}\,.$$

Wenn x zwischen x^0 und $\bar{x}$ liegt, ergibt sich noch ein Zusatzglied für $\delta\, g(x, \bar{x})$, welches daher rührt, dass $g(x, x^0)$ bereits an der Stelle $x = x^0$ einen Sprung gemacht hat, während $g(x, \bar{x})$ erst an der Stelle $x = \bar{x}$ springt. Wir wollen eine bestimmte Stelle $x = \xi$ zwischen x^0 und $\bar{x}$ betrachten, und setzen dabei zunächst $x^0 < \xi < \bar{x}$ voraus. Wir gehen nun von der Identität aus:

$$g(\xi, \bar{x}) - g(\xi, x^0) = g(\xi, \bar{x}) - g(\xi, \xi) + g(\xi, \xi) - g(\xi, x^0).$$

Dabei sei unter $g(\xi, \xi)$ der Wert von $g(x, \xi)$ vor dem Sprung, also $\lim\limits_{x \to \xi - 0} g(x, \xi)$ verstanden.

Zunächst entwickeln wir $g(x, \bar{x})$ nach $\bar{x} - \xi$ an der Stelle $x = \xi$, wobei $x < \xi$ sein soll. Da also x ausserhalb des Intervalls von ξ bis $\bar{x}$ liegt, gilt nach (2)

$$g(x, \bar{x}) = g(x, \xi) + g_{\bar{x}}(x, \xi)(\bar{x} - \xi).$$

Lassen wir nun x von links gegen ξ gehen, so erhalten wir auf Grund der Stetigkeit von g und $g_{\bar{x}}$

$$g(\xi, \bar{x}) = g(\xi, \xi) + g_{\bar{x}}(\xi, \xi)(\bar{x} - \xi). \tag{3}$$

Da $\bar{x}$ auch den speziellen Wert ξ haben darf, ist nach (2)

$$g(x, \xi) = g(x, x^0) + g_{\bar{x}}(x, x^0)(\xi - x^0).$$

Diese Entwicklung ist richtig für $x > \xi$. Lassen wir nun x von rechts gegen ξ gehen, so ist

$$\lim_{x \to \xi + 0} g(x, \xi) = g(\xi, \xi) + h(\xi).$$

und wir erhalten auf Grund der Stetigkeit von g und $g_{\bar{x}}$

$$g(\xi, \xi) + h(\xi) = g(\xi, x^0) + g_{\bar{x}}(\xi, x^0)(\xi - x^0). \tag{4}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $g_{\bar{x}}(x, \bar{x})$ in $\bar{x}$ können wir $g_{\bar{x}}(\xi, \xi)$ in (3) durch $g_{\bar{x}}(\xi, x^0)$ ersetzen. Dann ergibt sich durch Addition von (3) und (4)

$$g(\xi, \bar{x}) - g(\xi, x^0) = -h(\xi) + g_{\bar{x}}(\xi, x^0)(\bar{x} - x^0).$$

Indem wir ξ wieder durch x ersetzen, erhalten wir

$$\delta g(x, \bar{x}) = g(x, \bar{x}) - g(x, x^0) = -h(x) + g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta x.$$

Im Falle $\bar{x} < x < x^0$ finden wir durch dieselbe Rechnung

$$\delta g(x, \bar{x}) = +h(x) + g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\bar{x}.$$

Es ist also

$$(5)\ \delta g(x, \bar{x}) = \begin{cases} g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\bar{x}, & \text{wenn } x \text{ nicht zwischen } x^0 \text{ und } x \text{ liegt,} \\ -h(x) + g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\bar{x}, & \text{wenn } x^0 < x < \bar{x} \text{ ist,} \\ +h(x) + g_{\bar{x}}(x, x^0)\,\delta\bar{x}, & \text{wenn } \bar{x} < x < x^0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Der vorhin für δI erhaltene Ausdruck lässt sich schreiben:

$$\delta I = \int f(x, x^0)\,\delta g(x, \bar{x})\,d\omega(x) + \int g(x, x^0)\,\delta f(x, \bar{x})\,d\omega(x) + \\ + \int f(x, x^0)\,g(x, x^0)\,d\,\delta\omega(x)$$

und unter Berücksichtigung von (5) ist dann:

$$(6) \qquad \delta I = \int_{\bar{x}}^{x^0} f(x, x^0)\,h(x)\,d\omega(x) + \delta\bar{x} \int [f(x, x^0)\,g_{\bar{x}}(x, x^0) + \\ + g(x, x^0)\,f_{\bar{x}}(x, x^0)]\,d\omega(x) + \int f(x, x^0)\,g(x, x^0)\,d\,\delta\omega(x)$$

Durch unsere Untersuchungen hat sich ergeben, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Variationsregel $\delta f g = f \delta g + g \delta f$ unter einem Integralzeichen auch dann noch anwendbar ist, wenn eine der Funktionen f und g eine Unstetigkeitsstelle mit endlichem Sprung besitzt. Dabei ist die Variation der unstetigen Funktion durch (5) zu erklären.

Wenn wir voraussetzen, dass in einer festen Umgebung der Stelle $x = x^0$ $h(x)$ stetig ist und $\omega(x)$ eine stetige Ableitung besitzt, können wir bei hinreichend kleinem $\delta\bar{x}$

$$(7) \qquad \int_{\bar{x}}^{x^0} f(x, x^0)\,h(x)\,d\omega(x) = -\delta\bar{x}\,f(x^0, x^0)\,h(x^0)\,\omega'(x^0)$$

setzen.

Wir entwickeln jetzt dieselben Gedanken für zwei Variable. Es sei

$$I = \iint f(x, y; \bar{x}, \bar{y})\,g(x, y; \bar{x}\,\bar{y})\,d\omega_N(P),$$
$$I^0 = \iint f(x, y; x^0\,y^0)\,g(x, y; x^0, y^0)\,d\omega(P).$$

Dabei bedeute $P = P(x, y)$ den Punkt mit den Koordinaten x, y.

Es ist nun die erste Variation von I an der Stelle $\bar{x} = x^0$, $\bar{y} = y^0$, $\omega_N(P) = \omega(P)$ zu ermitteln. $\omega_N(P) = \omega_N(x, y)$ und $\omega(P) = \omega(x, y)$ seien monotone Funktionen von x und y. In einer festen Umgebung von x^0, die das von den Geraden $x = x^0, x = \bar{x}, y = y^0$ und $y = \bar{y}$ eingeschlossenen Gebiet enthält, seien sie auch stetig.

$f(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ ändere sich stetig mit dem Punkte $P(x, y)$, ebenso $g(x, y; \bar{x}, \bar{y})$, wenn $x \neq \bar{x}$ und $y \neq \bar{y}$ ist. $g(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ kann an der Geraden $x = \bar{x}$ einen Sprung $h_1(x, y; \bar{y})$ und an der Geraden $y = \bar{y}$ einen Sprung $h_2(x, \bar{y}; \bar{x})$ besitzen. $f(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ besitze als Funktion von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ eine Taylorentwicklung, die wir mit den linearen Gliedern abbrechen können:

$$(8) \quad f(x, y; x, \bar{y}) = f(x, y; x^0, y^0) + f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)(\bar{x} - x^0) + \\ + f_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)(\bar{y} - y^0).$$

Eine ebensolche Taylorentwicklung besitze $g(x, y; \bar{x}, \bar{y})$, wenn weder x zwischen x^0 und $\bar{x}$ noch y zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt:

$$(9) \quad g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = g(x, y; x^0, y^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)(\bar{x} - x^0) + \\ + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)(\bar{y} - y^0).$$

$g_{\bar{x}}(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ und $g_{\bar{y}}(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ sollen sowohl vom Wertepaar x, y als auch vom Wertepaar $\bar{x}, \bar{y}$ ohne Einschränkung stetig abhängen. Desgleichen sollen die Funktionen $f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)$ und $f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)$ der Taylorentwicklung (8) stetig vom Wertepaar x, y abhängen.

Wir erhalten dann durch dieselben Ueberlegungen wie im Falle einer Variabeln

$$\delta I = \iint f(x, y; x^0, y^0)[g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) - g(x, y; x^0, y^0)]\, d\omega(P) + \\ + \iint g(x, y; x^0, y^0)[f(x, y; \bar{x}, \bar{y}) - f(x, y; x^0, y^0)]\, d\omega(P) + \\ + \iint f(x, y : x^0, y^0)\, g(x, y; x^0, y^0)\, d\,\delta\omega(P).$$

Es ist nun

$$f(x, y; \bar{x}, \bar{y}) - f(x, y; x^0, y^0) = \delta f(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = \\ = f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{x} + f_{\bar{y}}(x, y; x^0 y^0)\,\delta\bar{y}.$$

Entsprechend setzen wir

$$g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) - g(x, y; x^0, y^0) = \delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y})$$

Dann ist, wenn weder x zwischen x^0 und $\bar{x}$ noch y zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt, nach (9)

$$\delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{y}.$$

Wir nehmen jetzt wieder an, dass $x^0 < \bar{x}$ ist, und betrachten einen festen Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, für den $x^0 < \xi < \bar{x}$ ist und η nicht zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt. Zunächst ist

$$g(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}) - g(\xi, \eta; x^0, y^0) = g(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}) - g(\xi, \eta; \xi, y^0) + \\ + g(\xi, \eta; \xi, y^0) - g(\xi, \eta; x^0, y^0) .$$

Dabei sei unter $g(\xi, \eta; \xi, y^0)$ der wert von $g(x, \eta; \xi, y^0)$ vor dem Sprung, also $\lim\limits_{x \to \xi - 0} g(x, \eta; \xi, y^0)$ verstanden. Dann ist nach (9) auf Grund derselben Ueberlegungen wie bei einer Variabeln:

$$(10) \qquad g(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}) = g(\xi, \eta; \xi, y^0) + g_{\bar{x}}(\xi, \eta; \xi, y^0)(\bar{x} - \xi) + \\ + g_{\bar{y}}(\xi, \eta; \xi, y^0)(\bar{y} - y^0)$$

und

$$(11) \quad g(\xi, \eta; \xi, y^0) + h_1(\xi, \eta; y^0) = g(\xi, \eta; x^0, y^0) + g_{\bar{x}}(\xi, \eta; x^0, y^0)(\xi - x^0) .$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen können wir $g_{\bar{x}}(\xi, \eta; \xi, y^0) = g_{\bar{x}}(\xi, \eta; x^0, y^0)$ und $g_{\bar{y}}(\xi, \eta; \xi, y^0) = g_{\bar{y}}(\xi, \eta; x^0, y^0)$ setzen. Dann folgt durch Addition von (10) und (11)

$$g(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}) - g(\xi, \eta; x^0, y^0) = -h_1(\xi, \eta; y^0) + \\ + g_{\bar{x}}(\xi, \eta; x^0, y^0)(\bar{x} - x^0) + g_{\bar{y}}(\xi, \eta; x^0, y^0)(\bar{y} - y^0) .$$

Es ergibt sich also, indem wir für ξ und η wieder x und y schreiben:

$$\delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = -h_1(x, y; y^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{y} .$$

Wenn $\bar{x} < x < x^0$ ist und y nicht zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt, ergibt sich durch dieselben Ueberlegungen

$$\delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = +h_1(x, y; y^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\,\delta\bar{y} .$$

Wenn x nicht zwischen x^0 und $\bar{x}$, aber y zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt, ergeben sich entsprechende Ausdrücke, die an Stelle von $h_1(x, y; y^0)$ die Funktion $h_2(x, y; x^0)$ enthalten. Den Fall, dass sowohl x zwischen x^0 und $\bar{x}$ als auch y zwischen y^0 und $\bar{y}$ liegt, brauchen wir nicht zu betrachten, wenn wir annehmen, dass im dem Rechteck mit den Ecken (x^0, y^0), $(\bar{x}, y^0)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ und $(x^0, \bar{y})$ eine stetige Wahrscheinlichkreitsdichte $\varphi(x, y)$ vorhanden ist. Denn die Integration über dieses Rechteck liefert dann nur einen Beitrag von der Grössenordnung $\delta\bar{x} . \delta\bar{y}$ der vernachlässigt werden kann.

Der für δI erhaltene Ausdruck lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}\delta I = &\iint f(x, y; x^0, y^0)\, \delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y})\, d\omega(P) + \\ &+ \iint g(x, y; x^0, y^0)\, \delta f(x, y; \bar{x}, \bar{y})\, d\omega(P) + \\ &+ \iint f(x, y; x^0, y^0)\, g(x, y; x^0, y^0)\, d\,\delta\omega(P).\end{aligned}$$

Darin ist

$$\delta f(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + f_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}$$

und nach den soeben gemachten Ausführungen

$$\delta g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}, & \text{wenn } x \text{ nicht zwischen } x^0 \text{ und } \bar{x} \text{ und } y \text{ nicht zwischen } y^0 \text{ und } \bar{y} \text{ liegt}, \\ -h_1(x, y; y^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}, & \text{wenn } x^0 < x < \bar{x} \text{ ist und } y \text{ nicht zwischen } y^0 \text{ und } \bar{y} \text{ liegt}, \\ +h_1(x, y; y^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}, & \text{wenn } \bar{x} < x < x^0 \text{ ist und } y \text{ nicht zw. } y^0 \text{ und } \bar{y} \text{ liegt}, \\ -h_2(x, y; x^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}, & \text{wenn } x \text{ nicht zwischen } x^0 \text{ und } \bar{x} \text{ liegt und } y^0 < y < \bar{y} \text{ ist}, \\ +h_2(x, y; x^0) + g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{x} + g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0)\, \delta\bar{y}, & \text{wenn } x \text{ nicht zwischen } x^0 \text{ und } \bar{x} \text{ liegt und } \bar{y} < y < y^0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Indem wir in den Ausdruck für δI die Werte von δf und δg einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta I = &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\bar{x}}^{x^0} f(x, y; x^0, y^0)\, h_1(x, y; y^0)\, d\omega(P) + \\ &+ \delta\bar{x} \iint \left[f(x, y; x^0, y^0)\, g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) + \right. \\ &\left. + g(x, y; x^0, y^0)\, f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) \right] d\omega(P) + \\ &+ \int_{\bar{y}}^{y^0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; x^0, y^0)\, h_2(x, y; x^0)\, d\omega(P) + \\ &+ \delta\bar{y} \iint \left[f(x, y; x^0, y^0)\, g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0) + \right. \\ &\left. + g(x, y; x^0, y^0)\, f_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0) \right] d\omega(P) + \\ &+ \iint f(x, y; x^0, y^0)\, g(x, y; x^0, y^0)\, d\,\delta\omega(P).\end{aligned} \tag{12}$$

Wenn wir voraussetzen, dass in einem Parallelstreifen, der die Gerade $x = x^0$ enthält, und in einem Parallelstreifen, der die Gerade $x = y^0$ enthält, eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichte (oder Massendichte) $\varphi(x, y)$ vorhanden ist, sodass dort $d\omega(P) = \varphi(x, y)\,dx\,dy$ ist, und wenn wir weiter voraussetzen, dass $h_1(x, y; y^0)$ im ersten Streifen stetig von x und $h_2(x, y; x^0)$ im zweiten Streifen stetig von y abhängt, ist bei hinreichend kleinem $\delta\bar{x}$ und $\delta\bar{y}$ in erster Annäherung:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\bar{x}}^{x^0} f(x, y; x^0, y^0)\, h_1(x, y; y^0)\, d\omega(P) = \\
&= -\delta\bar{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^0, y; x^0, y^0)\, h_1(x^0, y; y^0)\, \varphi(x^0, y)\, dy\,, \\
&\int_{\bar{y}}^{y^0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y; x^0, y^0)\, h_2(x, y; x^0)\, d\omega(P) = \\
&= -\delta\bar{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y^0; x^0, y^0)\, h_2(x, y^0; x^0)\, \varphi(x, y^0)\, dx.
\end{aligned}
$$

§ 3. Weitere Hilfssätze zur Berechnung der mittleren Fehlerquadrate und Korrelationen der Potenzmomente.

Im Weiteren müssen wir noch von den beiden folgenden Hilfssätzen Gebrauch machen.

Hilfssatz 1.

$x_1, x_2 \ldots x_N$ sei eine Zufallsreihe von N unabhängigen Beobachtungen. $f(x_i)$ sei eine Funktion von x_i, die jedem x_i einen endlichen Wert zuordnet.

Dann stellt $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_N)$ ebenfalls eine Zufallsreihe von N unabhängigen Werten dar.

Mit f^0 bezeichnen wir den wahrscheinlichen Wert der Zufallsreihe $f(x_i)$. Das mittlere Fehlerquadrat von f lautet dann:

$$m^2(f) = (f^2)^0 - (f^0)^2\,.$$

Bedeutet S die Summe über alle Beobachtungen, so gilt folgender Hilfssatz 1:

Das mittlere Fehlerquadrat des arithmetischen Mittels von f ist gleich dem N-ten Teil des mittleren Fehlerquadrats von f selbst.

Oder durch eine Formel ausgedrückt:

$$m^2\left(S\,\frac{f}{N}\right) = \frac{(f^2)^0 - (f^0)^2}{N}\,.$$

Der Beweis ergibt sich folgendermassen:

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für unabhängige Variable erhalten wir:

$$m^2\left(S\,\frac{f}{N}\right) = S\,m^2\left(\frac{f}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\,S\,m^2\,(f)\,.$$

Da $m^2\,(f)$ für alle Beobachtungen gleich ist, gilt:

$$\frac{1}{N^2}\,S\,m^2\,(f) = \frac{N\,m^2\,(f)}{N^2} = \frac{m^2\,(f)}{N}\,,$$

womit der Beweis erbracht ist.

Dieser Satz behält auch dann seine Gültigkeit, wenn f eine Funktion von zwei oder mehreren Variabeln ist.

Hilfssatz 2.

Wir gehen wiederum von einer Zufallsreihe von N unabhängigen Beobachtungen aus $(x_1, x_2 \ldots x_N)$.

Bedeuten $f\,(x_i)$ und $g\,(x_i)$ zwei verschiedene Funktionen von x_i, die jedem x_i einen endlichen Wert zuordnen, so bilden die einzelnen Funktionswerte zwei Zufallsreihen;

$$\begin{array}{ll} f\,(x_1)\,;\,f\,(x_2)\,\ldots & f\,(x_N)\,; \\ g\,(x_1)\,;\,g\,(x_2)\,\ldots & g\,(x_N)\,; \end{array}$$

die miteinander korreliert sind. Die Funktionswerte in jeder einzelnen Reihe sind jedoch voneinander unabhängig. Die wahrscheinlichen Werte der beiden Reihen seien f^0 und g^0. Als Rohkorrelation von f^0 und g^0 bezeichnen wir folgenden Ausdruck:

$$R\,(f\,,g) = [(f - f^0)\,(g - g^0)]^0 = (f\,g)^0 - f^0\,g^0.$$

Es gilt nun der Hilfssatz 2:

Die Rohkorrelation zwischen dem arithmetischen Mittel von f und g ist gleich dem N-ten Teil der Rohkorrelation zwischen f und g selbst.

Oder in einer Formel:

$$R\left(S\,\frac{f}{N}\,,S\,\frac{g}{N}\right) = \frac{(f \cdot g)^0 - f^0\,g^0}{N}\,.$$

Zum Beweise dieses Satzes müssen wir Indizes einführen: Wir setzen

$$\begin{array}{ll} f\,(x_i) = f_i & i = 1\,,2 \ldots N \\ g\,(x_j) = g_j & j = 1\,,2 \ldots N \end{array}$$

Dann ist:

$$R\left(\underset{i}{S}\frac{f_i}{N},\underset{j}{S}\frac{g_j}{N}\right)=\left[\left(\underset{i}{S}\frac{f_i-f^0}{N}\right)\left(\underset{j}{S}\frac{g_j-g^0}{N}\right)\right]^0=$$

$$=\frac{1}{N^2}\left[\underset{i}{S}\,\underset{j}{S}\,(f_i-f^0)\,(g_j-g^0)\right]^0=\frac{1}{N^2}\underset{i}{S}\,\underset{j}{S}\,[(f_i-f^0)\,(g_j-g^0)]^0.$$

f_i und g_j sind für $i \neq j$ voneinander unabhängig, es werden also alle Glieder $[(f_i-f^0)\,(g_j-g^0)]^0$ für $i \neq j$ gleich Null. Es bleibt also übrig:

$$\frac{1}{N^2}\underset{i}{S}\,[(f_i-f^0)\,(g_i-g^0)]^0=\frac{1}{N^2}S\,R\,(f_i\,g_i)\;.$$

Da $R\,(f_i\,,g_i)$ für alle Beobachtungen gleich ist, folgt weiter:

$$\frac{1}{N^2}S\,R\,(f_i\,,g_i)=\frac{N\,R\,(f\,,g)}{N^2}=\frac{R\,(f\,,g)}{N}=\frac{(f\,g)^0-f^0\,g^0}{N}\,.$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Auch dieser Hilfssatz behält seine Gültigkeit, wenn f und g Funktionen von mehr als einer Variabeln sind.

§ 4. — Das mittlere Fehlerquadrat der Potenzmomente bei Verwendung der wahrscheinlichen Werte x^0 und y^0.

Für die Potenzmomente in einer Variabeln haben wir hier folgende Darstellung:

$$P_{|n}=\frac{S\,(x-\bar{x})^n\,sg\,(x-\bar{x})}{N}\,.$$

Ist der wahrscheinliche Wert x^0 der Variabeln bekannt, so ist es vorteilhaft, ihn statt des arithmetischen Mittels zu verwenden.

Die Potenzmomente lauten dann folgendermassen:

$$P_{|n}=\frac{S\,(x-x^0)^n\,sg\,(x-x^0)}{N}$$

In diesem Falle gestaltet sich die Berechnung des mittleren Fehlerquadrats besonders einfach, sodass es zweckmässig ist, damit zu beginnen. Die Darstellung der Potenzmomente als Stieltjessche Integrale ist hier noch nicht notwendig. Der wahrscheinliche Wert von $P_{|n}$ ist:

$$p_{|n} = \left[\frac{S\,(x-x^{\circ})^{n}\ \mathrm{sg}\ (x-x^{\circ})}{N}\right]^{\circ} = [(x-x^{\circ})^{n}\ \mathrm{sg}\ (x-x^{\circ})]^{\circ}$$

Das mittlere Fehlerquadrat $m^2\,(P_{|n})$ kann nun sofort angegeben werden:

Setzen wir $(x-x^{\circ})^{n}\ \mathrm{sg}\ (x-x^{\circ}) = f$, so gilt:

$$P_{|n} = S\,\frac{f}{N}\,.$$

Nach Hilfssatz I folgt dann ohne weiteres:

$$m^2\,(P_{|n}) = \frac{(f^2)^{\circ} - (f^{\circ})^2}{N}\,.$$

$$f^{\circ} = [(x-x^{\circ})^{n}\ \mathrm{sg}\ (x-x^{\circ})]^{\circ} = p_{|n}\,.$$

$$(f^2)^{\circ} = [(x-x^{\circ})^{2n}]^{\circ} = p_{2n}\,.$$

Wir erhalten also:

$$\boxed{m^2\,(P_{|n}) = \frac{p_{2n} - p^2_{|n}}{N}}$$

Für den Fall $n = o$ gilt:

$$\boxed{m^2\,(P_{|0}) = \frac{1 - p^2_{|0}}{N}}$$

Für die signumfreien Potenzmomente folgt:

$$\boxed{m^2\,(P_n) = \frac{p_{2n} - p^2_n}{N}}\,.$$

Ganz entsprechende Formeln erhalten wir für die Potenzmomente in zwei Variabeln.

Sie werden dargestellt durch den Ausdruck:

$$P_{|n|m} = \frac{S\,(x-\bar{x})^{n}\,(y-\bar{y})^{m}\ \mathrm{sg}\ (x-\bar{x})\ \mathrm{sg}\ (y-\bar{y})}{N}$$

oder, wenn wir die wahrscheinlichen Werte x^0 und y^0 statt der arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ verwenden, durch

$$P_{|n|m} = \frac{S\,(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \operatorname{sg}(x - x^0) \operatorname{sg}(y - y^0)}{N}.$$

Wir gehen zunächst wiederum nur auf den letzteren Fall ein, weil er wesentlich einfacher ist als der erste.

Den wahrscheinlichen Wert von $P_{|n|m}$ bezeichen wir mit:

$$p_{|n|m} = \left[\frac{S\,(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \operatorname{sg}(x - x^0) \operatorname{sg}(y - y^0)}{N}\right]^0$$
$$= [\,(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \operatorname{sg}(x - x^0) \operatorname{sg}(y - y^0)\,]^0.$$

Setzen wir

$$(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \operatorname{sg}(x - x^0) \operatorname{sg}(y - y^0) = f,$$

so erhalten wir nach dem Hilfssatz 1 genau so wie im Falle einer Variabeln:

$$m^2\,(P_{|n|m}) = m^2\left(S\,\frac{f}{N}\right) = \frac{(f^2)^0 - (f^0)^2}{N}.$$

Es ist $\quad f^0 = p_{|n|m} \quad ; \quad (f^2)^0 = p_{2n,2m},$

sodass die allgemeine Formel lautet:

$$\boxed{m^2\,(P_{|n|m}) = \frac{p_{2n,2m} - p^2_{|n|m}}{N}}.$$

Entsprechend gilt für die Signumfreien und die gemischten Potenzmomente

$$\boxed{m^2\,(P_{n,m}) = \frac{p_{2n,2m} - p^2_{n,m}}{N}}$$

bzw.

$$\boxed{m^2\,(P_{|n\,m}) = \frac{p_{2n,2m} - p^2_{|n,m}}{N}}.$$

§ 5. Die mittleren Fehlerquadrate der Potenzmomente bei Verwendung der arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$.

Im Falle einer Variabeln ist

$$P_{|m} = \frac{S\,(x - \bar{x})^m \operatorname{sg}(x - \bar{x})}{N}.$$

Die Berechnung des mittleren Fehlerquadrats ist jetzt umständlicher als bei Verwendung des wahrscheinlichen Wertes x^0. Wir können nämlich jetzt nicht mehr $f(x) = (x - \bar{x})^n \operatorname{sg}(x - \bar{x})$ setzen und den Hilfssatz 1 anwenden, da die beobachteten Grössen $x - \bar{x}$ voneinander abhängig sind. Wir erhalten eine passende Funktion $f(x)$, indem wir $P_{|n} - p_{|n}$ berechnen.

Diese Berechnung geschieht am einfachsten mit Hilfe Stieltjesscher Integrale. Wir setzen in den Ausdrücken des § 2

$$f(x, \bar{x}) = (x - \bar{x})^n \text{ und } g(x, \bar{x}) = \operatorname{sg}(x - \bar{x}).$$

$\omega_N(x)$ und $\omega(x)$ sollen jetzt wieder die in § 1 definierten Funktionen sein. Dann ist $I = P_{|n}$, $I^0 = p_{|n}$, $\delta I = P_{|n} - p_{|n} = \delta P_{|n}$. Wir erhalten also $\delta P_{|n}$, indem wir in (6) und (7) von § 2 die jetzigen Werte von f und g einsetzen. Es ist

$$\begin{aligned}
f(x, x^0) &= (x - x^0)^n & g(x, x^0) &= \operatorname{sg}(x - x^0) \\
f_{\bar{x}}(x, x^0) &= -n\,(x - x^0)^{n-1} & g_{\bar{x}}(x, x^0) &= 0 \\
f(x^0, x^0) &= \begin{cases} 0 \text{ für } n > 0 \\ 1 \text{ für } n = 0 \end{cases} & h(x) &= 2\,.
\end{aligned}$$

Daher ist für $n > 0$

$$\begin{aligned}
\delta P_{|n} &= -\delta \bar{x} \int n\,(x - x^0)^{n-1} \operatorname{sg}(x - x^0)\, d\,\omega(x) + \\
&+ \int (x - x^0)^n \operatorname{sg}(x - x^0)\, d\,\delta\,\omega(x) = \\
&= -n\,p_{|n-1}\,\delta \bar{x} + \int (x - x^0)^n \operatorname{sg}(x - x^0)\, d\,\delta\,\omega(x)
\end{aligned}$$

und

$$\delta P_{|0} = -2\,\omega'(x^0)\,\delta \bar{x} + \int \operatorname{sg}(x - x^0)\, d\,\delta(x)\,.$$

Der Leser überzeugt sich mühelos davon, dass die Voraussetzungen, die wir in § 2 über f und g gemacht haben, um die Formeln (6) und (7) zu erhalten, wirklich erfüllt sind. Von $\omega(x)$ setzten wir für (7) eine stetige Ableitung in einer Umgebung von x^0 voraus. Diese Voraussetzung müssen wir also auch jetzt machen. Von $\omega_N(x)$ verlangten wir Stetigkeit im Intervall von x^0 bis $\bar{x}$. Nach der Definition von $\omega_N(x)$ in § 1 ist diese Voraussetzung nicht gültig. Da $\omega_N(x)$ in dem Intervall von x^0 bis $\bar{x}$ gegen die stetige Funktion $\omega(x)$ strebt, können wir aber $\omega_N(x)$ in diesem Intervall durch eine solche stetige Funktion ersetzen, dass der dadurch entstehende Fehler vernachlässigt werden kann. Damit ist zugleich die Schwierigkeit behoben, die der Integralausdruck für $P_{|0}$ mit sich brachte.

Die bisher erhaltenen Ausdrücke für $\delta P_{|n}$ und $\delta P_{|0}$ sind noch keine endgültigen. Die Funktion $P_{|n}$, welche vom Parameter $\bar{x}$ und von der Funktion $\omega_N(x)$ abhängt, hängt nämlich in Wahrheit nur von dieser Funktion ab; denn $\bar{x}$ ist ja durch $\omega_N(x)$ wegen der Beziehung

$$\int (x - \bar{x})\, d\,\omega_N(x) = 0$$

vollständig bestimmt. Wir haben also die Aufgabe $\delta P_{|n}$ unter dieser Nebenbedingung zu bestimmen.

Wenn wir die erste Variation unserer Nebenbedingung bilden, erhalten wir

$$\int (x - x^0)\, d\,\delta\,\omega(x) - \int \delta\,\bar{x}\, d\,\omega(x) = 0$$

oder

$$\delta\,\bar{x} = \int (x - x^0)\, d\,\delta\,\omega(x)\,.$$

Diese Beziehung, die $\delta\,\bar{x}$ durch $\delta\,\omega(x)$ ausdrückt, lässt sich auch direkt verifizieren.

Dadurch wird für $n > 0$

$$\delta P_{|n} = \int [(x - x^0)^n \operatorname{sg}(x - x^0) - n\, p_{|n-1}(x - x^0)]\, d\,\delta\,\omega(x)$$

und

$$\delta P_{|0} = \int [\operatorname{sg}(x - x^0) - 2\,\omega'(x^0)(x - x^0)]\, d\,\delta\,\omega(x)\,.$$

Bezeichnen wir den Integranden zur Abkürzung mit $f(x)$, so ist

$$\delta P_{|n} = \int f(x)\, d\delta\omega(x) = \int f(x)\, d\,\omega_N(x) - \int f(x)\, d\omega(x) = \frac{S\,f(x)}{N} - [f(x)]^0.$$

Da $m^2(P_{|n}) = m^2(\delta P_{|n}) = m^2\left(\frac{S\,f}{N}\right)$ ist, erhalten wir nach Hilfssatz 1

$$m^2(P_{|n}) = \frac{(f^2)^0 - (f^0)^2}{N}\,.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} m^2(P_{|n}) &= \frac{1}{N}(p_{2n} - 2n\,p_{|n-1}\,p_{|n+1} + n^2 p^2_{|n-1}\,p_2 - p^2_{|n}) \text{ für } n > 0 \\ m^2(P_{|0}) &= \frac{1}{N}(1 - 4\,\omega'(x^0)\,p_{|1} + 4\,(\omega'(x))^2\,p_2 - p^2_{|0}) \end{aligned}}$$

Den Fall der signumfreien Potenzmomente erhalten wir, wenn wir $g(x, \bar{x}) = 1$ setzen. Dann ist

$$g(x, x^0) = 1 \qquad g_{\bar{x}}(x, x^0) = 0 \qquad h(x) = 0$$

und es wird für jedes $n \geq 0$

$$\delta P_{|n} = -\delta\bar{x}\int n\,(x - x^0)^{n-1}\,d\,\omega(x) + \int (x - x^0)^n\,d\,\delta\,\omega(x)$$

oder

$$\begin{aligned} \delta P_{|n} &= -n\,p_{n-1}\,\delta\bar{x} + \int (x - x^0)^n\,d\,\delta\,\omega(x) \\ &= \int [(x - x^0)^n - n\,p_{n-1}\,(x - x^0)]\,d\,\delta\,\omega(x)\,. \end{aligned}$$

Schliesslich wird

$$\boxed{m^2(P_n) = \frac{1}{N}(p_{2n} - 2n\,p_{n-1}\,p_{n+1} + n^2 p^2_{n-1}\,p_2 - p^2_n}$$

Bei den Potenzmomenten $P_{|n|m}$ in zwei Variabeln ist der Gedankengang genau so wie bei einer Variabeln. Wir berechnen $P_{|n|m} - p_{|n|m}$ mit Hilfe Stieltjesscher Integrale, indem wir in den Ausdrücken des § 2

$$f(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = (x - \bar{x})^n\,(y - \bar{y})^m \text{ und } g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{sg}(x - \bar{x})\operatorname{sg}(y - \bar{y})$$

setzen. Als $\omega_N(x, y)$ und $\omega(x, y)$ nehmen wir die in § 1 definierten Funktionen. Dann ist also

$$I = P_{|n|m} = \iint (x - \bar{x})^n\,(y - \bar{y})^m \operatorname{sg}(x - \bar{x}) \operatorname{sg}(y - \bar{y})\,d\,\omega_N(P)$$

und

$$I^0 = p_{|n|m} = \iint (x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \operatorname{sg}(x - x^0) \operatorname{sg}(y - y^0)\,d\,\omega(P)$$

Wir bilden $\delta I = \delta P_{|n|m} = P_{|n|m} - p_{|n|m}$, indem wir in (12) und (13) von § 2 die jetzigen Werte von f und g einsetzen. Es ist dann:

$$f(x, y; x^0, y^0) = (x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \qquad g(x, y; x^0, y^0) = \operatorname{sg}(x - x^0)\operatorname{sg}(y - y^0)$$

$$f_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) = -n(x-x^0)^{n-1}(y-y^0)^m \quad g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) = 0$$

$$f_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0) = -m(x-x^0)^n(y-y^0)^{m-1} \quad g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0) = 0$$

$$f(x^0, y; x^0, y^0) = \begin{cases} 0 \text{ für } n > 0 \\ (y-y^0)^m \text{ für } n = 0 \end{cases} \qquad f(x, y^0; x^0, y^0) = \begin{cases} 0 \text{ für } m > 0 \\ (x-x^0)^n \text{ für } m = 0 \end{cases}$$

$$h_1(x^0, y; y^0) = 2\,\mathrm{sg}\,(y-y^0) \qquad h_2(x, y^0; x^0) = 2\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)$$

Wir setzen noch zur Abkürzung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-x^0)^n\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\varphi(x, y^0)\,dx = \alpha_{x|n},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,\varphi(x^0, y)\,dy = \alpha_{y|m}.$$

Dann ist nach (12) und (13)

für $n > 0$:

$$\begin{aligned}\delta P_{|n|m} = & -\delta\bar{x}\iint n(x-x^0)^{n-1}(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\omega(P) \\ & -\delta\bar{y}\iint m(x-x^0)^n(y-y^0)^{m-1}\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\omega(P) \\ & +\iint(x-x^0)^n(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P) \\ = & -n\,p_{|n-1|m}\,\delta\bar{x} - m\,p_{|n|m-1}\,\delta\bar{y} \\ & +\iint(x-x^0)^n(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P)\end{aligned}$$

für $n = 0, m > 0$:

$$\begin{aligned}\delta P_{|0|m} = & -2\alpha_{y|m}\,\delta\bar{x} - \delta\bar{y}\iint m(y-y^0)^{m-1}\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\omega(P) \\ & +\iint(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P) \\ = & -2\alpha_{y|m}\,\delta\bar{x} - m\,p_{|0|m-1}\,\delta\bar{y} + \\ & +\iint(y-y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P)\end{aligned}$$

und entsprechend

für $n > 0, m = 0$:

$$\begin{aligned}\delta P_{|n|0} = & -n\,p_{|n-1|0}\,\delta\bar{x} - 2\alpha_{x|n}\,\delta\bar{y} + \\ & +\iint(x-x^0)^n\,\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P)\end{aligned}$$

und für $n = 0, m = 0$:

$$\delta P_{|0|0} = -2\alpha_{y|0}\,\delta\bar{x} - 2\alpha_{x|0}\,\delta\bar{y} + \iint\mathrm{sg}\,(x-x^0)\,\mathrm{sg}\,(y-y^0)\,d\delta\omega(P).$$

Die drei letzten Ausdrücke sind im ersten enthalten, wenn wir festsetzen, dass

(14) für $n = 0$ $n\, p_{|n-1|m} = 2\,\alpha_{y|m}$ und für $m = 0$ $m\, p_{|n|m-1} = 2\,\alpha_{x|n}$

sein soll. Wir rechnen deshalb hinfort nur noch mit dem ersten Ausdruck von $\delta P_{|n|m}$.

Der Leser kann sich wieder leicht davon überzeugen, dass die Voraussetzungen, die wir in § 2 über f und g gemacht haben, um die Ausdrücke (12) und (13) zu erhalten, erfüllt sind. In den Ausdrücken für $\alpha_{x|n}$ und $\alpha_{y|m}$ ist vorausgesetzt, dass in zwei Parallelstreifen, die die Geraden $x = x^0$ und $y = y^0$ enthalten, eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x, y)$ existiert. Deshalb strebt $\omega_N(x, y)$ in diesem Streifen gegen eine stetige Funktion und kann in ihnen mit einem zu vernachlässigenden Fehler durch eine stetige Funktion ersetzt werden. Damit ist auch die Schwierigkeit behoben, die die Integraldarstellungen von $P_{|0|m}$ und $P_{|n|0}$ mit sich brachten.

Um $\delta P_{|n|m}$ in endgültiger Gestalt zu erhalten, müssen wir noch die beiden Nebenbedingungen

$$\iint (x - \bar{x})\, d\,\omega_N(P) = 0 \quad \text{und} \quad \iint (y - \bar{y})\, d\,\omega_N(P) = 0$$

berücksichtigen. Sie liefern

$$\delta\,\bar{x} = \iint (x - x^0)\, d\,\delta\,\omega(P) \ \text{ und } \ \delta\,\bar{y} = \iint (y - y^0)\, d\,\delta\,\omega(P).$$

Daher wird

$$\delta P_{|n|m} = \iint [\,(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m \ \mathrm{sg}\ (x - x^0)\ \ \mathrm{sg}\ (y - y^0) -$$
$$- n\, p_{|n-1|m}\,(x - x^0) - m\, p_{|n|m-1}\,(y - y^0)\,]\; d\,\delta\,\omega(P)\,.$$

Wenn wir den Integranden mit $f(x, y)$ bezeichnen, ist

$$\delta P_{|n|m} = \iint f(x, y)\, d\,\omega_N(P) - \iint f(x, y)\, d\,\omega(P) = \frac{S\,f(x, y)}{N} - [f(x, y)]^0.$$

Jetzt ist aber $m^2\,(P_{|n|m}) = m^2\,(\delta\,P_{|n|m}) = m^2 \left(\dfrac{S\,f}{N}\right)$ und mithin nach Hilfssatz 1

$$m^2\,(P_{|n|m}) = \frac{(f^2)^0 - (f^0)^2}{N}\,.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} m^2 (P_{|n|m} = \frac{1}{N} (p_{2n,2m} - 2\,n\,p_{|n-1|m}\,p_{|n+1|m} - 2\,m\,p_{|n|m-1}\,p_{|n|m+1} \\ + n^2\,p^2_{|n-1|m}\,p_{20} + 2\,n\,m\,p_{|n-1|m}\,p_{|n|m-1}\,p_{11} + m^2\,p^2_{|n|m-1}\,p_{02} - p^2_{|n|m}). \end{aligned}}$$

Im Falle der gemischten Potenzmomente $P_{|nm}$ setzen wir in (12) und (13) von § 2 $g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = \mathrm{sg}\,(x - \bar{x})$. Dann ist

$$g(x, y; x^0, y^0) = \mathrm{sg}\,(x - x^0) \qquad g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) = g_{\bar{y}}(x, y; x^0 y^0) = 0$$
$$h_1(x^0, y; y^0) = 2 \qquad h_2(x, y^0; x^0) = 0\,.$$

Wir setzen noch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y - y^0)^m\,\varphi(x^0, y)\,d\,y = \alpha_{ym}$$

und übertragen damit die Verabredung über das Fortlassen der Striche auf $\alpha_{y|m}$ und entsprechend auf $\alpha_{x|n}$.

Jetzt ist für alle Werte von $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{für } n > 0: \delta P_{|nm} &= -\delta\bar{x} \iint n\,(x - x^0)^{n-1}\,(y - y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x - x^0)\,d\,\omega\,(P) \\ &\quad - \delta\bar{y} \iint m\,(x - x^0)^n\,(y - y^0)^{m-1}\,\mathrm{sg}\,(x - x^0)\,d\,\omega\,(P) \\ &\quad + \iint (x - x^0)^n\,(y - y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x - x^0)\,d\,\delta\,\omega\,(P) \\ &= -n\,p_{|n-1,m}\,\delta\bar{x} - m\,p_{|nm-1}\,\delta\bar{y} \\ &\quad + \iint (x - x^0)^n\,(y - y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x - x^0)\,d\,\delta\,\omega\,(P) \\ \text{für } n = 0: \delta P_{|0m} &= -2\,\alpha_{ym}\,\delta\bar{x} - m\,p_{|0m-1}\,\delta\bar{y} + \\ &\quad + \iint (y - y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x - x^0)\,d\,\delta\,\omega\,(P)\,. \end{aligned}$$

Um auch hier hinfort beide Fälle nicht unterscheiden zu brauchen, bestimmen wir, dass die Festsetzung (14) auch noch bei Fortlassung der senkrechten Striche von $\alpha_{y|m}$ und $\alpha_{x|n}$ gelten soll. Es soll also

(14 a) $\quad n\,p_{|n-1,m} = 2\,\alpha_{ym}$ für $n = 0$ und $m\,p_{n|m-1} = 2\,\alpha_{xn}$ für $m = 0$

sein. (Es ist aber $n\,p_{n-1|m} = n\,p_{n-1,m} = 0$ für $n = 0$ und entsprechend für m).

Indem wir für $\delta\,\bar{x}$ und $\delta\,\bar{y}$ ihre Werte in den Ausdruck für $\delta P_{|nm}$ einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta P_{|nm} = \iint [(x - x^0)^n\,(y - y^0)^m\,\mathrm{sg}\,(x - x^0) - n\,p_{|n-1,m}\,(x - x^0) - \\ - m\,p_{|nm-1}\,(y - y^0)]\,d\,\delta\,\omega\,(P) \end{aligned}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} m^2(P_{|nm}) = \frac{1}{N}\,(p_{2n2m} - 2n\,p_{|n-1,m}\,p_{|n+1,m} - 2m\,p_{|nm-1}\,p_{|nm+1} + \\ + n^2 p^2_{|n-1\,m}\,p_{20} + 2nm\,p_{|n-1\,m}\,p_{|nm-1}\,p_{11} + m^2 p^2_{|nm-1}\,p_{02} - p^2_{|nm}) \end{aligned}}$$

Im Falle der signumfreien Potenzmomente setzen wir

$$g(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = 1.$$

Dann ist

$$g(x, y; x^0, y^0) = 1 \qquad g_{\bar{x}}(x, y; x^0, y^0) = g_{\bar{y}}(x, y; x^0, y^0) = 0$$
$$h_1(x^0, y; y^0) = h_2(x, y^0; x^0) = 0$$

Für alle Werte von n und m ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} \delta P_{nm} &= -\delta\bar{x}\iint n\,(x-x^0)^{n-1}(y-y^0)^m\,d\,\omega(P) - \\ &\quad -\delta\bar{y}\iint m\,(x-x^0)^n(y-y^0)^{m-1}\,d\,\omega(P) + \\ &\quad +\iint (x-x^0)^n\,(y-y^0)^m\,d\,\delta\,\omega(P) \\ &= -n\,p_{n-1,m}\,\delta\bar{x} - m\,p_{nm-1}\,\delta\bar{y} + \iint (x-x^0)^n(y-y^0)^m\,d\,\delta\,\omega(P) \\ &= \iint \left[(x-x^0)^n(y-y^0)^m - n\,p_{n-1,m}\,(x-x^0) - \right. \\ &\quad \left. - m\,p_{nm-1}\,(y-y^0)\right] d\,\delta\,\omega(P) \end{aligned}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} m^2(P_{nm}) = \frac{1}{N}\,(p_{2n2m} - 2n\,p_{n-1,m}\,p_{n+1,m} - 2m\,p_{nm-1}\,p_{nm+1} + \\ + n^2 p^2_{n-1,m}\,p_{20} + 2nm\,p_{n-1\,m}\,p_{nm-1}\,p_{11} + m^2 p^2_{nm-1}\,p_{02} - p^2_{nm}) \end{aligned}}$$

§ 6. Die quadratische Korrelation zwischen den Potenzmomenten.

Die Berechnung der zwischen den einzelnen Potenzmomenten bestehenden quadratischen Korrelationen bietet nach dem Vorausgegangenen keinerlei Schwierigkeiten mehr.

Sind P_λ und P_μ irgend zwei Potenzmomente einer oder zweier Variabeln, mit oder ohne Signumfaktoren, und sind $\delta P_\lambda = \dfrac{S f_\lambda - f^0_\lambda}{N}$

und $\delta P_\mu = \dfrac{S f_\mu - f^\circ_\mu}{N}$ die dazugehörigen ersten Variationen, so ergibt sich nach dem zweiten Hilfssatz für die Rohkorrelation zwischen P_λ und P_μ folgende Formel:

$$R(P_\lambda, P_\mu) = (\delta P_\lambda \delta P_\mu)^\circ = \left(\frac{S f_\lambda - f^\circ_\lambda}{N} \cdot \frac{S f_\mu - f^\circ_\mu}{N}\right)^\circ = \frac{(f_\lambda f_\mu)^\circ - f^\circ_\lambda f^\circ_\mu}{N}$$

Durch Division dieses Ausdruckes durch die beiden mittleren Fehler $m(P_\lambda)$ und $m(P_\mu)$ erhalten wir die Feinkorrelation (die gewöhnliche quadratische Korrelation). Sie lautet:

$$r(P_\lambda, P_\mu) = \frac{R(P_\lambda \,.\, P_\mu)}{m(P_\lambda)\,.\,m(P_\mu)} = \frac{(f_\lambda f_\mu)^\circ - f^\circ_\lambda f^\circ_\mu}{\sqrt{[(f^2_\lambda)^\circ - (f^\circ_\lambda)^2]\,[(f^2_\mu)^\circ - (f^\circ_\mu)^2]}}$$

So gelten z. B. für die beiden mittleren Fehlerquadrate P_{20} und P_{02} folgende Formelm:

$$f_\lambda = (x - x^\circ)^2$$

$$f_\mu = (y - y^\circ)^2$$

Für die Rohkorrelation erhalten wir:

$$R(P_{20}, P_{02}) = \frac{[(x - x^\circ)^2 (y - y^\circ)^2]^\circ - [(x - x^\circ)^2]^\circ [(y - y^\circ)^2]^\circ}{N} =$$

$$= \frac{p_{22} - p_{20} p_{02}}{N}$$

Die Feinkorrelation lautet dann

$$r(P_{20} P_{02}) = \frac{p_{22} - p_{20} p_{02}}{\sqrt{(p_{40} - p^2_{20})\,(p_{04} - p^2_{02})}}\,.$$

Im Falle der Gaussverteilung gilt dann infolge der Relationen:

$$p_{22} = p_{20} p_{02} + 2 p^2_{11}$$

$$p_{40} = 3 p^2_{20}$$

$$p_{04} = 3 p^2_{20}$$

Die vereinfachte Formel:

$$r(P_{20} | P_{02}) = \frac{p^2_{11}}{p_{20} p_{20}}\,.$$

Die Feinkorrelation zwischen den Variabeln x und y selbst ist definiert als $r_2 = \frac{P_{11}}{\sqrt{P_{20} P_{02}}}$, oder wenn wie die theoretischen Werte zur Bildung des Ausdrucks heranziehen, als

$$r_2' = \frac{p_{11}}{\sqrt{p_{20}\, p_{02}}} .$$

Beachten wir das, so erhalten wir

$$r\,(P_{20}\, P_{02}) = (r_2')^2 .$$

Die quadratische Korrelation zwischen den beiden mittl. Fehlerquadraten ist also das Quadrat der quadratischen Korrelation zwischen den beiden Variabeln x und y.

§ 7. Das mittlere Fehlerquadrat von Funktionen der Potenzmomente.

Nachdem die mittleren Fehlerquadrate und Rohkorrelationen aller Potenzmomente bekannt sind, ist es mit Hilfe des Fortpflanzungsgesetzes des mittleren Fehlers ohne Weiteres möglich, das mittlere Fehlerquadrat von Funktionen der Potenzmomente zu berechnen. Derartige Funktionen sind z. B. die quadratische Korrelation, der Regressionskoeffizient und der Lenz'sche Korrelationsausdruck. Die Berechnungen gelten natürlich, wie alle, die mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes durchgeführt werden, nur in erster Annäherung.

Ist $F\,(P_\mu\,, P_\nu\,, P_\lambda \ldots)$ eine stetige, nach jeder Variabeln mindestens einmal differenzierbare Funktion der Potenzmomente $P_\mu\,, P_\nu\,, P_\lambda \ldots$ wobei $P_\mu\,, P_\nu\,, P_\lambda \ldots$ sowohl Signumals auch signumfreie Potenzmomente in einer oder in zwei Variabeln sein können, so gilt für die erste Variation von F:

$$\delta F = \delta P_\mu \frac{\partial F}{\partial P_\mu} + \delta P_\nu \frac{\partial F}{\partial P_\nu} + \delta P_\lambda \frac{\partial F}{\partial P_\lambda} \cdots$$

Dabei sind die Differentialquotienten

$\frac{\partial F}{\partial P_\mu}, \frac{\partial F}{\partial P_\nu}, \frac{\partial F}{\partial P_\lambda} \ldots$ an der Stelle $p_\mu, p_\nu\,, p_\lambda \ldots$ zu nehmen.

Durch Quadrieren und Bildung des wahrscheinlichen Wertes auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir das gesuchte mittlere Fehlerquadrat.

$$m^2(F) = [(\partial F)^2]^0 = \left(\frac{\partial F}{\partial P_\mu}\right)^2 [(\delta P_\mu)^2]^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial P_\nu}\right)^2 [(\delta P_\nu)^2]^0 +$$

$$+ 2 \frac{\partial F}{\partial P_\mu} \frac{\partial F}{\partial P_\nu} (\delta P_\mu \, \delta P_\nu)^0 \ldots$$

In diese Formel treten alle mittl. Fehlerquadrate und Rohkorrelationen der vorkommenden Potenzmomente auf.

Diese Methode wenden wir nun auf verschiedene Funktionen der Potenzmomente an.

1). Zunächst bestimmen wir das mittlere Fehlerquadrat der *quadratischen Korrelation* r_2.

$$r_2 = \frac{P_{11}}{\sqrt{P_{20} \, P_{02}}} .$$

Es erweist sich hier als zweckmässig vor Bildung der ersten Variation zu logarithmieren.

$$\log r_2 = \log P_{11} - \frac{1}{2} \log P_{20} - \frac{1}{2} \log P_{02} .$$

Die erste Variation an der Stelle (p_{11}, p_{20}, p_{02}) lautet dann:

$$\frac{\delta r_2}{\left(\frac{p_{11}}{\sqrt{p_{20} \, p_{02}}}\right)} = \frac{\delta P_{11}}{p_{11}} - \frac{1}{2} \frac{\delta P_{20}}{p_{20}} - \frac{1}{2} \frac{\delta P_{02}}{p_{02}} .$$

Wir quadrieren nun diese Gleichung auf beiden Seiten und bilden sodann den wahrscheinlichen Wert.

Ersetzen wir die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretenden mittleren Fehlerquadrate und Rohkorrelation der Potenzmomente durch die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke

$$[(\delta P_{11})^2]^0 = \frac{p_{22} - p_{11}^2}{N} \, . \quad (\delta P_{11} \, \delta P_{20})^0 = \frac{p_{31} - p_{11} \, p_{20}}{N}$$

$$[(\delta P_{20})^2]^0 = \frac{p_{40} - p_{20}^2}{N} \, . \quad (\delta P_{11} \, \delta P_{02})^0 = \frac{p_{13} - p_{11} \, p_{02}}{N}$$

$$[(\delta P_{02})^2]^0 = \frac{p_{04} - p_{02}^2}{N} \, . \quad (\delta P_{20} \, \delta P_{02})^0 = \frac{p_{22} - p_{20} \, p_{02}}{N}$$

so erhalten wir für das mittlere Fehlerquadrat der quadratischen Korrelation die bekannte Formel:

$$m^2(r_2) = \frac{1}{N}\frac{p_{11}^2}{p_{20}\,p_{02}}\left[\frac{p_{22}-p_{11}^2}{p_{11}^2} + \frac{p_{40}-p_{20}^2}{4\,p_{20}^2} + \frac{p_{04}-p_{02}^2}{4\,p_{02}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{p_{20}-p_{20}\,p_{02}}{p_{20}\,p_{02}} - \frac{p_{31}-p_{11}\,p_{20}}{p_{11}\,p_{20}} - \frac{p_{13}-p_{11}\,p_{02}}{p_{11}\,p_{20}}\right].$$

Wir können diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen. Es folgte:

$$\boxed{m^2(r_2) = \frac{1}{N}\cdot\frac{p_{11}^2}{p_{20}\,p_{02}}\left[\frac{p_{22}}{p_{11}^2} + \frac{p_{40}}{4\,p_{20}^2} + \frac{p_{04}}{4\,p_{02}^2} + \frac{p_{22}}{2\,p_{20}\,p_{02}} - \frac{p_{31}}{p_{11}\,p_{20}} - \frac{p_{13}}{p_{11}\,p_{02}}\right].}$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn wir l i n e a r e R e g r e s s i o n zwischen den beiden Variabeln annehmen. In diesem Fall, der weitaus der häufigste ist, gelten zwischen den hier vorkommenden Potenzmomenten folgende Beziehungen.

$$p_{31} = \frac{p_{11}\,p_{40}}{p_{20}}\;;\; p_{13} = \frac{p_{11}\,p_{04}}{p_{02}}\,.$$

Setzen wir diese Relation in den obigen Ausdruck für $m^2(r_2)$ ein, so erhalten wir:

$$\boxed{m^2(r_2) = \frac{1}{N}\frac{p_{11}^2}{p_{20}\,p_{02}}\left[\frac{p_{22}}{p_{11}^2} + \frac{p_{22}}{2\,p_{20}\,p_{02}} - \frac{3}{4}\left(\frac{p_{40}}{p_{20}^2} + \frac{p_{04}}{p_{02}^2}\right)\right].}$$

Noch einfacher wird diese Formel bei G a u s s v e r t e i l u n g. Hier genügen 3 Potenzmomente zur vollkommenen Charakterisierung der Verteilung, d. h. alle höheren Potenzmomente lassen sich beispielshalber durch p_{20}, p_{02} und p_{11} darstellen. Es ist:

$$\begin{aligned} p_{22} &= p_{20}\,p_{02} + 2\,p_{11}^2 \\ p_{31} &= 3\,p_{11}\,p_{20} \\ p_{13} &= 3\,p_{11}\,p_{02} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p_{40} &= 3\,p_{20}^2 \\ p_{04} &= 3\,p_{02}^2\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in den ursprünglichen Ausdruck für $m^2(r_2)$ erhalten wir dann die sehr einfache Formel:

$$m^2(r_2) = \frac{\left(1 - \frac{p_{11}^2}{p_{20}\,p_{02}}\right)^2}{N}$$ oder, wenn wir die aus den theoretischen Potenzmomenten gebildete quadratische Korrelation mit r_2' bezeichnen:

$$\boxed{m^2(r_2) = \frac{(1 - (r_2')^2)^2}{N}\,.}$$

Die hier für das mittlere Fehlerquadrat der Feinkorrelation abgeleiteten Ausdrücke haben sowohl bei Verwendung der wahrscheinlichen Werte x^0 und y^0 als auch bei Verwendung der arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ Gültigkeit.

2) Das mittlere Fehlerquadrat des linearen Regressionskoeffizienten $R_{\frac{x}{y}} = \frac{P_{11}}{P_{02}}$ erhalten wir in ganz ähnlicher Weise.

Zunächst logarithmieren wir:

$$\log R_{\frac{x}{y}} = \log P_{11} - \log P_{02}$$

Für die erste Variation von $R_{\frac{x}{y}}$ an der Stelle (p_{11}, p_{02}) folgt:

$$\frac{\delta R_{\frac{x}{y}}}{\frac{p_{11}}{p_{02}}} = \frac{\delta P_{11}}{p_{11}} - \frac{\delta P_{02}}{p_{02}}$$

Durch Quadrieren und Bildung des wahrscheinlichen Wertes auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir:

$$m^2\left(R_{\frac{x}{y}}\right) = \frac{1}{N}\frac{p_{11}^2}{p_{02}^2}\left[\frac{p_{21}}{p_{11}^2} + \frac{p_{04}}{p_{02}^2} - \frac{2\,p_{13}}{p_{11}\,p_{02}}\right]$$

Auf Grund der im Fall der linearen Regression bestehenden Relationen zwischen den einzelnen Potenzmomenten ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$\boxed{m^2\left(R_{\frac{x}{y}}\right) = \frac{p_{22}\,p_{02}^2 - p_{11}^2\,p_{04}}{N\,.\,p_{02}^4}}$$

Nehmen wir nun Gaussverteilung an, so reduziert sich diese Formel auf:

$$m^2\left(R_{\frac{x}{y}}\right)=\frac{p_{20}p_{02}-p_{11}^2}{p_{02}^2}$$

Bezeichnen wir wiederum $\frac{p_{11}}{\sqrt{p_{20}p_{02}}}$ mit r'_2 so folgt endlich

$$\boxed{m^2\left(R_{\frac{x}{y}}\right)=\frac{p_{20}}{p_{02}}\cdot\left(\frac{1-(r'_2)^2}{N}\right)}.$$

Auch für das mittlere Fehlerquadrat des Regressionskoeffizienten ist es gleichgültig, ob wir die wahrscheinlichen Werte x^0 und y^0 oder die arith. Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ verwenden.

3). Im Folgenden berechnen wir nun noch das mittlere Fehlerquadrat des Lenz'schen Korrelationsausdrucks r_1 und gehen dabei von der verbesserten Form aus, die ich diesem Ausdruck gegeben habe. Danach lautet er:

$$r_1=\frac{P_{1|0}P_{|01}}{P_{|10}P_{0|1}}$$

Wir logarithmieren wiederum:

$$\log r_1=\log P_{1|0}+\log P_{|01}-\log P_{|10}-\log P_{0|1}.$$

Für die erste Variation folgt:

$$\frac{\delta\, r_1}{r'_1}=\frac{\delta P_{1|0}}{p_{1|0}}+\frac{\delta P_{|01}}{p_{|01}}-\frac{\delta P_{|10}}{p_{|10}}-\frac{\delta P_{0|1}}{p_{0|1}}$$

wobei r'_1 der uns den theoretischen Werten gebildete Korrelationsausdruck ist. Durch Quadrieren und Bildung des wahrscheinlichen Wertes erhalten wir wiederum das gesuchte Fehlerquadrat.

Im Gegensatz zur Feinkorrelation und dem Regressionskoeffizienten müssen wir hier unterscheiden, ob wir die wahrscheinlichen Werte x^0 und y^0 oder die arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ verwenden.

Wir behandeln zunächst den 1. Fall. Die hierbei auftretenden mittleren Fehlerquadrate und Rohkorrelationen lauten folgendermassen:

$$[(\delta P_{1|0})^2]^0=\frac{p_{20}-p_{1|0}^2}{N}\qquad[(\delta P_{|10})^2]^0=\frac{p_{20}-p_{|10}^2}{N}$$

$$[(\delta P_{|01})^2]^\circ = \frac{p_{02} - p^2_{|01}}{N} \qquad [(\delta P_{0|1})^2]^\circ = \frac{p_{02} - p^2_{0|1}}{N}.$$

$$(\delta P_{1|0}\,\delta P_{|01})^\circ = \frac{p_{|1|1} - p_{1|0}\,p_{|01}}{N}; \quad (\delta P_{|10}\,\delta P_{0|1})^\circ = \frac{p_{|1|1} - p_{|10}\,p_{0|1}}{N};$$

$$(\delta P_{1|0}\,\delta P_{|10})^\circ = \frac{p_{|2|0} - p_{1|0}\,p_{|10}}{N}; \quad (\delta P_{1|0}\,\delta P_{0|1})^\circ = \frac{p_{11} - p_{1|0}\,p_{0|1}}{N};$$

$$(\delta P_{|01}\,\delta P_{0|1})^\circ = \frac{p_{|0|2} - p_{|01}\,p_{0|1}}{N}; \quad (\delta P_{|01}\,\delta P_{|10})^\circ = \frac{p_{11} - p_{|01}\,p_{|10}}{N};$$

Für das gesuchte mittlere Fehlerquadrat ergibt sich dann folgender Ausdruck:

$$\boxed{\begin{aligned} m^2(r_1) = \frac{1}{N}(r_1')^2 \cdot \Bigg[&\frac{p_{20}}{p^2_{1|0}} + \frac{p_{02}}{p^2_{|01}} + \frac{p_{20}}{p^2_{|10}} + \frac{p_{02}}{p^2_{0|1}} + \frac{2p_{|1|1}}{p_{1|0}\,p_{|01}} + \frac{2p_{|1|1}}{p_{|10}\,p_{0|1}} - \\ &- \frac{2p_{|2|0}}{p_{1|0}\,p_{|10}} - \frac{2p_{|0|2}}{p_{|01}\,p_{0|1}} - \frac{2p_{11}}{p_{1|0}\,p_{0|1}} - \frac{2p_{11}}{p_{|01}\,p_{|10}} \Bigg]. \end{aligned}}$$

Wesentlich komplizierter gestaltet sich der Ausdruck für das mittlere Fehlerquadrat von r_1, wenn wir die arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ zur Bildung der Potenzmomente verwenden.

In diesem Falle haben wir für die auftretenden mittleren Fehlerquadrate und Rohkorrelationen folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} m_1^2 = [(\delta P_{1|0})^2]^\circ = \frac{1}{N}(&p_{20} + p_{20}\,p^2_{0|0} + 4\,\alpha^2_{x1}\,p_{02} - 2\,p_{2|0}\,p_{0|0} \\ &- 4\,p_{1|1}\,\alpha_{x1} + 4\,p_{11}\,p_{0|0} - p^2_{1|0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2^2 = [(\delta P_{|01})^2]^\circ = \frac{1}{N}(&p_{02} + p_{02}\,p^2_{|00} + 4\,\alpha^2_{y1}\,p_{02} - 2\,p_{|02}\,p_{|00} \\ &- 4\,p_{|11}\,\alpha_{y1} + 4\,p_{11}\,p_{|00} - p^2_{|01}) \end{aligned}$$

$$m_3^2 = [(\delta P_{|10})^2]^\circ = \frac{1}{N}(p_{20} - 2\,p_{|00}\,p_{|2,0} + p^2_{|00}\,p_{2,0} - p^2_{|10})$$

$$m_4^2 = [(\delta P_{0|1})^2]^\circ = \frac{1}{N}(p_{02} - 2\,p_{0|0}\,p_{0|2} + p^2_{0|0}\,p_{02} - p^2_{0|1})$$

$$R_{12} = [\delta P_{1|0}\, \delta P_{|01}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{|1|1} + p_{0|0}\, p_{11} + 4\, p_{11}\, \alpha_{x1}\, \alpha_{y1} - 2\, p_{2|0}\, \alpha_{y1}$$

$$- 2\, p_{0|2}\, \alpha_{x1} - p_{|00}\, p_{1|1} - p_{0|0}\, p_{|11} + 2\, p_{02}\, p_{|00}\, \alpha_{x1} + 2\, p_{20}\, p_{0|0}\, \alpha_{y1}$$

$$- p_{1|0}\, p_{|01})$$

$$R_{13} = [\delta P_{1|0}\, \delta P_{|10}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{|2|0} - p_{|20}\, p_{0|0} - 2\, p_{|11}\, \alpha_{x1} - p_{2|0}\, p_{|00}$$

$$+ p_{20}\, p_{0|0}\, p_{|00} + 2\, p_{11}\, p_{|00}\, \alpha_{x1} - p_{1|0}\, p_{|10})$$

$$R_{14} = [\delta P_{1|0}\, \delta P_{0|1}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{11} - 2\, p_{1|1}\, p_{0|0} + p_{11}\, p_{0|0}^2 - 2\, p_{0|2}\, \alpha_{x1}$$

$$+ 2\, p_{02}\, p_{0|0}\, \alpha_{x1} - p_{1|0}\, p_{0|1})\,.$$

$$R_{23} = [\delta P_{|01}\, \delta P_{|10}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{11} - 2\, p_{|11}\, p_{|00} + p_{11}\, p_{|00}^2 - 2\, p_{|20}\, \alpha_{y1}$$

$$+ 2\, p_{20}\, p_{|00}\, \alpha_{y1} - p_{|01}\, p_{|10})\,.$$

$$R_{24} = [\delta P_{|01}\, \delta P_{0|1}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{|0|2} - p_{0|2}\, p_{|00} - 2\, p_{1|1}\, \alpha_{y1} - p_{|02}\, p_{0|0}$$

$$+ p_{02}\, p_{0|0}\, p_{|00} + 2\, p_{11}\, p_{0|0}\, \alpha_{y1} - p_{|01}\, p_{0|1})\,.$$

$$R_{34} = [\delta P_{|10}\, \delta P_{0|1}]^\circ = \frac{1}{N}\,(p_{|1|1} - p_{|11}\, p_{0|0} - p_{1|1}\, p_{|00}$$

$$+ p_{11}\, p_{|00}\, p_{0|0} - p_{|10}\, p_{0|1})\,.$$

Behalten wir diese Abkürzungen bei, so lautet das gesuchte Resultat:

$$\boxed{\begin{aligned} m^2(r_1) = \frac{1}{N}\,(r'_1)^2 \Bigg[& \frac{m_1^2}{p_{1|0}^2} + \frac{m_2^2}{p_{|01}^2} + \frac{m_3^2}{p_{|10}^2} + \frac{m_4^2}{p_{0|1}^2} + \frac{2\,R_{12}}{p_{1|0}\, p_{|01}} + \\ & + \frac{2\,R_{34}}{p_{|10}\, p_{0|1}} - \frac{2\,R_{13}}{p_{1|0}\, p_{|10}} - \frac{2\,R_{24}}{p_{|01}\, p_{0|1}} - \frac{2\,R_{14}}{p_{1|0}\, p_{0|1}} - \frac{2\,R_{23}}{p_{|01}\, p_{|10}} \Bigg]. \end{aligned}}$$

RAGNAR FRISCH

On the use of difference equations in the study of frequency distributions

Difference equations and differential equations have occasionally been used in the analysis of frequency distributions. Certain parts of the theories of KARL PEARSON and of CHARLIER are for instance based on the use of such equations.

However, these applications are of a rather special character. It does not seem that a systematic study of frequency distributions has ever been attempted from the differential point of view until a beginning in this direction was made by Professor GULDBERG's beautiful paper "On Discontinuous Frequency-Functions and Statistical Series" *) GULDBERG's paper contains several examples showing that the differential approach furnishes a strikingly simple solution of several classical problems in frequency distributions, for instance the problem of obtaining explicit expressions and recurrence formulae for the moments of the binominal, Poisson, Pascal, and hypergeometric distributions, and the problem of obtaining criteria that can indicate whether a given distribution belongs to a certain type or not. In problems of this kind the differential equation of the distribution seems to be a most natural and powerful tool of analysis. It may therefore be worth while to attempt a more general analysis of the subject, exhibiting the general nature of the principles involved, pointing out some further possibilities and also showing the natural limits of this tool in the study of frequency distributions. In the present paper some remarks on such a general analysis shall be made.

(*) «Skandinavisk Aktuarietidskrift», 1931, p. 167.

1. The (P, Q) class of a frequency distribution.

Let f_x be a finite frequency function given in the enumerable set of points $x = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \pm \infty$. For any given f_x it is always possible to indicate a set of numbers P_x and Q_x such that the equation

$$P_x f_x + Q_{x+1} f_{x+1} = 0 \tag{1.1}$$

holds good identically in x. It is even possible to select the numbers P and Q in such a way that there is no point x where both P_x and Q_{x+1} vanish. A set of numbers P and Q satisfying this condition will be called a (P, Q) set for the frequency function f.

Inversely, if there is given a set of numbers P and Q such that there is no point x where both P_x and Q_{x+1} vanish, these numbers may be taken as defining, by the difference equation (1.1), a frequency function f. Of course the frequency function is not uniquely determined by the numbers P and Q, but its principal characteristics are determined. More precisely expressed, if $x = h$ is any point where f is known, then f is by (1.1) determined upwards of $x = h$ if $Q_{h+1} \neq 0$ and downwards of $x = h$ if $P_h \neq 0$. We shall say that the frequency function f thus determined belongs to the class (P, Q). If (P_x, Q_{x+1}) is a set of numbers defining a class of frequency functions, and if φ_x is any function that is different from zero in all the points x, then the set $(\varphi_x P_x, \varphi_x Q_{x+1})$ obviously defines the same class.

In a region where Q_{x+1} does not vanish, the class may be defined by the single function

$$R_x = \frac{P_x}{Q_{x+1}}$$

and the corresponding difference equation

$$f_{x+1} + R_x f_x = 0 \,. \tag{1.2}$$

And in a region where P_x is different from zero, the class may be defined by the ratio

$$S_x = \frac{Q_{x+1}}{P_x}$$

and the corresponding equation

$$S_x f_{x+1} + f_x = 0 \,. \tag{1.3}$$

But this way of characterizing f breaks down in points where P_x or Q_{x+1} vanish. At the same time we notice that in order to characterize a frequency function that is zero in certain points, say outside of the interval $x = 0,1 \ldots s$, we just need to introduce numbers P_x and Q_{x+1} that vanish in certain points. The frequency function that is zero outside of the interval $x = 0,1 \ldots s$, but different from zero in $x = 0$ and $x = s$ is for instance characterized by $P_x = 0$, $Q_{x+1} \neq 0$ for $x \geq s$ and $Q_{x+1} = 0$, $P_x \neq 0$ for $x < 0$. In order to ensure generality we shall therefore consider the difference equation in the form (1.1) rather than in the form (1.2) or (1.3).

2. The tail equation

Performing on (1.1) a summation over x from t to ω we get

$$\sum_{x=t}^{\omega} (P_x + Q_x) f_x = Q_t f_t - Q_{\omega+1} f_{\omega+1}\,. \tag{2.1}$$

In the following we shall assume that the numbers Q_x are such that

$$\lim_{x \to \infty} Q_x f_x = 0\,. \tag{2.2}$$

For any frequency function that is zero outside of a finite interval, Q may obviously always be selected so as to satisfy (2.2).

If (2.2) is fulfilled, we have

$$\sum_{x=t}^{\infty} (P_x + Q_x) f_x = Q_t f_t\,. \tag{2.3}$$

This equation we shall call the *tail* equation.

3. A class of incomplete moments that can be easily determined.

Let L_x be a given function of x. The expression

$$[L f]_t = \sum_{x=t}^{\infty} L_x f_x \tag{3.1}$$

is called the *incomplete moment* of the frequency distribution f taken over the function L. If (3.1) converges as $t \to -\infty$, the expression

$$[L f] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} L_x f_x \tag{3.2}$$

is called the *complete moment* of f taken over L. There is a class of incomplete moments whose explicit expression can be easily determined by the tail equation. We now proceed to a study of these moments.

If a frequency function f_x is given, one of the corresponding functions P_x and Q_x can be selected arbitrarily, with the proviso that it must be equal to zero in those points where the P function or the Q function respectively, of the given f must vanish in order to define f correctly (if $f_s \neq 0$ and $f_{s+1} = 0$, we must for instance have $P_s = 0$). If a particular function Q_x is selected, the corresponding function P_x is by (1.1) determined in all points x where $f_x \neq 0$. If $f_x = 0$, we may attribute an arbitrary non-zero value to P_x.

For every function Q_x which we select, the function

$$L_x = P_x + Q_x \tag{3.3}$$

may consequently be looked upon as well defined. Over an interval where $Q_{x+1} \neq 0$, so that R_x is finite, the expression for L_x may for instance be written

$$L_x = Q_x + R_x Q_{x+1} \tag{3.4}$$

and over an interval where $P_x \neq 0$, so that S_x is finite, we have

$$L_{x+1} = S_x P_x + P_{x+1}\,. \tag{3.5}$$

Now insert the expression for L_x into the tail equation. This gives

$$\sum_{x=t}^{\infty} L_x f_x = Q_x f_x \tag{3.6}$$

which can also be written

$$\sum_{x=t}^{\infty} (Q_x + R_x Q_{x+1})\, f_x = Q_t f_t\,. \tag{3.7}$$

This means that *to every function Q_x which we select, there corresponds an incomplete moment whose explicit expression can be given.* And this holds good no matter what the particular nature of the distribution f_x is.

As an application of (3.6) consider the binominal distribution

$$f_x = \binom{s}{x} p^x q^{s-x} \qquad\qquad q = 1 - p\,.$$

As a (P, Q) set for this frequency function we may select (1)

$$P_x = p\,(x - s) \qquad\qquad Q_x = q^x \tag{3.8}$$

(1) Guldberg. loc. cit., p. 168.

Inserting (3.8) into (3.3) we get immediately $L_x = x - sp$ and hence

$$\sum_{x=t}^{\infty} (x - sp)\, f_x = q\, t\, f_t\,.$$

This is the explicit expression for the first order incomplete moment of the point binominal which I gave in the Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1924 (2). My original proof was rather an argument ad hoc. The general tail equation exhibits in an interesting manner the underlying reason why it is possible to give an explicit expression for this incomplete moment.

And by (3.7) we see that a whole class of other explicit formulae for incomplete point binominal moments may be derived simply by inserting an arbitrary function Q_x into the formula

$$\sum_{x=t}^{\infty} \left(Q_x + \frac{p\,(x-s)}{q\,(x+1)}\, Q_{x+1} \right) f_x = Q_t\, f_t\,.$$

The above procedure suggests the following inversion problem: If L_x is a given function, can we determine the corresponding function Q_x, and thus by inserting Q_t in the right member of (3.6) find an explicit expression for the incomplete moment that is written in the left member of (3.6). If so, the function Q_x may be looked upon as a sort of " solving kernel " for the problem.

For simplicity we confine the discussion of the inversion problem to an interval where R_x is finite. The function Q_x in question must then be such that the right member of (3.4) is equal to the given function L_x for all the points x that occur in the summation in (3.6). In other words Q_x must be a solution of the equation (3.4) considered as a difference equation in Q_x. The solution of such a difference equation is as a rule arbitrary to the extent that the value of the solution may be selected in *one* point on the x scale. On the other hand we only need to use one single value of Q_x, namely Q_t. This seems paradoxical: Why not choose Q_t as the arbitrary magnitude? There must obviously be something wrong in this argument for the moment in the left member of (3.6) is a perfectly determinate magnitude when L_x is given. The solution of the puzzle lies in the behaviour of the coefficient R_x in (3.4) when x approaches infinity. If f_x is a frequency function that is zero in a certain finite point, say $x = s + 1$, but different from zero in the preceding point $x = s$, then by (1.2) R_s must

(2) p. 161. See also GULDBERG loc. cit., p. 17.

be equal to zero. Consequently $Q_s = L_s$, which shows that *there is no arbitrariness at all left in* Q_x when L_x is given. On the other hand if R_x does not become rigorously zero in any finite point but approaches a limit (positive or zero) as x approaches infinity, then we have by (3.4)

$$\text{Lim}\, Q_x = \text{Lim}\, \frac{L_x}{1 + R_x} \qquad (x \rightarrow \infty)$$

which also puts a condition on the solution Q_x which we have to select.

Similarly over an interval where S_x is finite, the solution of the inversion problem would be given by the solution P_x of (3.5).

The inversion problem as here stated can easily be solved by a direct application of the classical formulae for the solution of a linear difference equation.

In fact consider the two difference equations in Y

$$Y_x = A_x\, Y_{x-1} + B_x \tag{3.9}$$

and

$$Y_x = A_x\, Y_{x+1} + B_x \tag{3.10}$$

where the coefficients A_x and B_x are finite, possibly zero in one or more points. Let $x = k$ be an initial point with the given initial value Y_k. In the general case where we do not exclude the vanishing of A_x. (3.9) only gives a means of determining Y_x for $x \geqq k$ and (3.10) only gives a means of determining Y_x for $x \leqq k$. In these determinations, the values A_k and B_k are not used. We may therefore attribute arbitrary values to these two numbers. For convenience we put $A_k = 0$ and $B_k =$ the initial value Y_k of Y. With this notation, the solutions of (3.9) and (3.10) are respectively

$$Y_x = \sum_{\varkappa = k}^{x} \left(A_x\, A_{x-1} \ldots A_{\varkappa+1}\right) . B_\varkappa \tag{3.11}$$

and

$$Y_x = \sum_{\varkappa = x}^{k} \left(A_x\, A_{x+1} \ldots A_{\varkappa-1}\right) . B_\varkappa\, . \tag{3.12}$$

where by convention $A_x\, A_{x-1} \ldots A_{\varkappa+1} = 1$ for $\varkappa = x$ and $A_x\, A_{x+1} \ldots A_{\varkappa-1} = 1$ for $\varkappa = x$. The formulae (3.11) and (3.12) are easily verified by insertion in (3.9) and (3.10).

Applying this to the equation (3.4) we get

$$Q_{x+1} = \sum_{\varkappa = x}^{k} (-)^{\varkappa - x} \left(R_{x+1}\, R_{x+2} \ldots R_\varkappa\right) L_{\varkappa+1} \tag{3.13}$$

where by convention $R_{x+1} R_{x+2} \dots R_{\varkappa} = 1$ for $\varkappa = x$. We have seen that if $f_s \neq 0$ and $f_{s+1} = 0$, Q_x must be determined in such a way that $Q_s = L_s$.

This is obtained by putting $k = s - 1$ in (3.13) which gives

$$(3.14) \qquad Q_x = \sum_{\varkappa = x}^{s} (-)^{\varkappa - x} (R_x R_{x+1} \dots R_{\varkappa - 1}) L_{\varkappa}$$

where by convention $R_x R_{x+1} \dots R_{\varkappa - 1} = 1$ for $\varkappa = x$.

In the case where f_x does not vanish in any finite point, it would be necessary to study the convergency of (3.14) under the double limiting process $s \to \infty$, $x \to \infty$ but we shall not enter upon any such discussion here.

The formula (3.14) gives a direct solution of the inversion problem in the case where f_x vanishes outside of a finite interval. But the result obtained by this direct procedure is not particularly useful because the formula to which it leads is not any simpler than the definition of the incomplete moment in question given by (3.1). Indeed, for any $\varkappa \gtreqless x$ such that $R_x, R_{x+1} \dots R_{\varkappa - 1}$ are finite, we deduce from (1.2)

$$f_{\varkappa} = (-)^{\varkappa - x} (R_x R_{x+1} \dots R_{\varkappa - 1}) f_x$$

so that f_x times the expression (3.14) reduces to

$$Q_x f_x = \sum_{\varkappa = 1}^{s} L_{\varkappa} f_{\varkappa} .$$

The practical usefulness of the inversion process therefore does not lie in the direct determination of the Q_x that corresponds to a given L_x, but lies rather in the possibility of applying the method *indirectly* as a tool in the study of approximate solutions and the like.

4. Characteristic multipliers for a given distribution.

Let f_x be a frequency function satisfying (1.1). Further let a be a given real number, and consider the difference equation in H_x

$$(4.1) \qquad P_x H_{x+1} + a\, Q_{x+1} H_x = 0 .$$

Apart from the constant factor a, this equation is the *adjoint equation* of the equation that holds good for the frequency function f_x itself.

A solution H_x of (4.1) we shall call a *characteristic multiplier* for the frequency distribution f_x, H_x will be said to belong to the characteristic number a.

The characteristic multiplier of a given distribution satisfies several interesting formulae. First we see that by multiplying (4.1) by f_{x+1} and (1.1) by aH_x and subtracting the two equations, we get

$$P_x\,(H_{x+1}\,f_{x+1} - a\,H_x\,f_x) = 0\,.$$

Similarly by multiplying (4.1) by f_x and (1.1) by H_{x+1} we obtain

$$Q_{x+1}\,(H_{x+1}\,f_{x+1} - a\,H_x\,f)_x = 0\,.$$

Since by hypothesis at least one of the two numbers P_x and Q_{x+1} is different from zero we have

$$H_{x+1}\,f_{x+1} = a\,H_x\,f_x\,. \tag{4.2}$$

Extending to this equation a summation over x from t to ω we get the proposition : *If H_x is a characteristic multiplier for the frequency distribution f_x, i. e. if H_x is a function that satisfies* (4.1), then

$$(1 - a)\sum_{x=t}^{\omega} H_x\,f_x = H_t\,f_t - H_{\omega+1}\,f_{\omega+1}\,. \tag{4.3}$$

This means that the incomplete moment of f taken over a characteristic multiplier for f can always be expressed in a simple form.

If
$$\lim_{x\to\infty} H_x\,f_x = 0$$

(which is certainly fulfilled when H_x is finite and f_x zero for $x > s$), the equation (4.3) can also be written

$$(1 - a)\sum_{x=t}^{\infty} H_x\,f_x = H_t\,f_t\,. \tag{4.4}$$

Let $H_{0,x}$, $H_{1,x}\dots H_{n,x}$ be a *set* of functions such that

$$P_x\,H_{n,x+1} + Q_{x+1}\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\,H_{\nu,x} = 0 \tag{4.5}$$

where $a_{n\nu}$ is a set of real numbers. Such a set of functions $H_{0.x}\dots H_{n,x}$ we shall call a set of characteristic multipliers for the frequency distribution f_x. $H_{0,x}\dots H_{n,x}$ will be said to belong to the characteristic numbers $a_{n\nu}$.

Any frequency distribution possesses a characteristic multiplier. To obtain one we only have to solve (4.2) with respect to H_x. The reason why it is nevertheless of interest to introduce also the notion of a *set* of multipliers as defined by (4.5) is that it may be advantageous to impose certain *conditions* on the nature of the multipliers to suit the particular kind of the problem at hand. And if the multipliers shall belong to a certain class of functions, it may of course happen that we are in a situation where a single function of the class is not a multiplier for a given frequency distribution but where a set of functions from the class does form a set of multipliers according to (4.5).

Consider for instance the case where P_x and Q_x are polynomials in x, Q_x of degree m, this degree being not lower than the degree of P_x. In this case we have the proposition : Let n be any integer $\geqq m$. *Then any set of* $(n+1)$ *linearly independent polynomials of degree not higher than* n, $H_{\nu, x}$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ *form a set of multipliers provided only that the last of them, namely,* $H_{n, x,}$ *contains* Q_x *as a divisor.* Since the degree shall not exceed n and one of the polynomials shall contain Q_x as a divisor, we must obviously have $n \geqq m$.

Indeed if $H_{n,x} = Q_x H'_{n-m,x}$ where H' in any polynomial (of degree zero or positive) we have

$$P_x H_{x+1} + Q_{x+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x} =$$

$$= Q_{x+1} \left[P_x H'_{n-m,x+1} + \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x} \right].$$

The bracket in the last expression is a polynomial of degree not higher than n. And the $(n+1)$ coefficients $a_{n\nu}$ can be disposed of in such a way as to make the bracket vanish. In fact, when the bracket is ordered as a polynomial in x, the coefficient of x^k becomes equal to

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu k} + C_k \tag{4.6}$$

where $H_{\nu k}$ is the coefficient of x^k in the polynomial $H_{\nu,x}$, and

$$C_k = \sum_{j=0}^{\min[k, n-m]} P_{k-j} H'_{n-m,j}$$

P_χ and $H'_{n-m,\chi}$ being the coefficients of x in the polynomial P_x and $H'_{n-m,x}$ respectively. Since the polynomials $H_{\nu k}$ are linearly independent, the determinant $|H_{\nu k}|$ is different from zero. It is consequently always possible to select the coefficients $a_{n\nu}$ in such a way that the expressions (4.6) vanish for $k = 0, 1 \ldots n$.

If P_x and Q_x are polynomials, the degree m of Q_x being not lower than the degree of P_x, we know from the above proposition that it is always possible to select a set of linearly independent polynomial multipliers if we allow the set to contain $m + 1$ such polynomials, none of the polynomials being of degree higher than m and $H_{m,x}$ being a constant times Q_x. And we also see that if no further special conditions are introduced, it will in general not be impossible to restrict the number of polynomials in the set any further.

A set of multipliers $H_{\nu,x}$ satisfy several interesting formulae. First let us multiply (4.5) by f_{x+1}, and introduce in the expression obtained $-P_x f_x$ for $Q_{x+1} f_{x+1}$. This gives

$$P_x \left[H_{n,x+1} f_{x+1} - f_x \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x} \right] = 0 .$$

Similarly we multiply (4.5) by f_x and introduce $-Q_{x+1} f_{x+}$ for $P_x f_x$, which gives

$$Q_{x+1} \left[H_{n,x+1} f_{x+1} - f_x \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x} \right] = 0 .$$

Since in any point x, at least one of the two numbers P_x and Q_{x+1} is different from zero, we have in any point x

$$H_{n,x+1} f_{x+1} = f_x \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x} . \tag{4.7}$$

Further let us us introduce the incomplete moments of f_x taken over the multipliers. We use the notation

$$M_{\nu(t,\omega)} = \sum_{x=t}^{\omega} H_{\nu,x} f_x \tag{4.8}$$

ω being some conveniently chosen upper limit of the summation. If (4.8) converges as $\omega \to \infty$ (which is certainly the case for instance when the $H_{\nu,x}$ are finite over any finite range and $f_x = 0$ outside a finite interval), then we may in particular consider the incomplete moments

$$M_{\nu,t} = \sum_{x=t}^{\infty} H_{\nu,x} f_x . \tag{4.9}$$

The moments (4.8) and (4.9) may be called the *characteristic* moments for the given distribution.

Extending to (4.7) a summation over x from $x = t$ to $x = \omega$ we get

$$(1 - a_{nn}) M_{n(t,\omega)} = H_{n,t} f_t - H_{n,\omega+1} f_{\omega+1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} M_{\nu(t,\omega)} . \tag{4.10}$$

Further, if the moments converge for $\omega \to \infty$, which entails

$$\lim_{x \to \infty} H_{n,x} f_x = 0 , \tag{4.11}$$

we get by extending to (4.7) a summation over x from t to ∞

$$(1 - a_{nn}) M_{n,t} = H_{n,t} f_t + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{n\nu} M_{\nu,t} . \tag{4.12}$$

Thus: *For any frequency distribution the incomplete moments taken over the characteristic mutipliers satisfy the simple recurrence formulae* (4.10) *and* (4.12).

As an example consider the binomial distribution. $A\ (P, Q)$ set for this distribution is (3.8). And the functions

$$H_{\nu,n} = x_\nu , \tag{4.13}$$

($\nu = 0.\ 1 \ldots n$ where $n \geqq 1$), form a set of characteristic multipliers. Indeed if $n = 1$ the polynomial $Q_{x+1} = q\ (x + 1)$ is a divisor in $H_{n,x+1} = (x + 1)$ so that the left member of (4.5) becomes

$$(x + 1) \left[p\ (x - s)\ (x + 1)^{n-1} + q \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, x^\nu \right]. \tag{4.14}$$

And it is always possible to determine the numbers $a_{\nu n}$ in such a way that the bracket in (4.14) vanish. We only have to put

$$a_{n\nu} = \frac{p}{q} \left(s \binom{n-1}{\nu} - \binom{n-1}{\nu-1} \right).$$

For the binomial distribution the incomplete power moments about the origin therefore satisfies (1)

$$M_{n,t} = q\, H_{n,t} f_t + p \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(s \binom{n-1}{\nu} - \binom{n-1}{\nu-1} \right) M_{\nu,t} .$$

Any set (4.13) where $n \geqq 1$ forms a set of characteristic multipliers for the binomial distribution. But for $n = 0$, we do *not* get such a set. That is to say a constant *is not* a characteristic multiplier for the binomial distribution. If it had been, we would have been

(1) The recurrence formulae for the incomplete power moments of the point binomial were, so far as I know, first given by me in « Biometrika » 1925 p. 177 (moments about the mean). See also GULDBERG Loc. cit. p. 171. In the formula on the 7th line by GULDBERG there is a misprint. The factor $(1 - p)$ in the left member has dropped out.

able to determine a simple explicit formula for the incomplete zero order moment of the point binomial. This throws some light on the well known fact that the exact value of the incomplete zero order moment of the point binomial is, as it were, surrounded by a Chinese wall in which it has not yet been possible to break any hole. (2).

We have seen that the incomplete characteristic moments of a given distribution satisfy the recurrence formulae (4.10) and (4.12). Inversely : If these recurrence formulae hold good, will the functions $H_{\chi,x}$ form a set of characteristic multipliers for f_x ? The answer is yes. Indeed, subtracting from (4.10) the same equation for $t+1$ we get

$$(1 - a_{nn})\, H_{n,t}\, f_t = H_{n,t}\, f_t - H_{n,t+1}\, f_{t+1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu}\, H_{\nu,t}\, f_t \,.$$

That is to say

$$H_{n,x+1}\, f_{x+1} - f_x \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, H_{\nu,x} = 0 \,.$$

Multiplying this equation by P_x and by Q_{x+1} we obtain by (1.1) respectively

$$f_{x+1}\,(P_x\, H_{n,x+1} + Q_{x+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, H_{\nu,x}) = 0$$

and

$$f_x\,(P_x\, H_{n,x+1} + Q_{x+1} \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, H_{\nu,x}) = 0 \,.$$

In any point x where either f_x or f_{x+1} or both are different from zero, the set $H_{\nu,x}$ must consequently satisfy (4.5). The equations (4.5) and (4.10) can therefore be looked upon as equivalent ways of defining the characteristic multipliers.

We may generalize (4.5) by considering the case where the right member of the equation is not zero but some function W_x, in other words we consider a set of functions $L_{0,x} \ldots L_{n,x}$ satisfying

$$P_x\, L_{n,x+1} + Q_{x+1} \sum_{\nu=0}^{n} C_{n\nu}\, L_{\nu,x} = W_x \tag{4.15}$$

where the $C_{\nu n}$ are constants.

---

(2) Upper and lower limits for the incomplete zero order moment of the point binomial are given in my paper. *Sur les semi-invariants et moments employés dans l'étude des distributions statistiques*. « Det Norske Videnskaps-akademie II », 1926. No. 3.

This leads to the equations

$$P_x\left[L_{n,x+1}\, f_{x+1} - f_x \sum_{\nu=0}^{n} C_{n\nu}\, L_{\nu,x}\right] = W_x\, f_{x+1}$$

$$Q_{x+1}\left[L_{n,x+1}\, f_{x+1} - f_x \sum_{\nu=0}^{n} C_{n\nu}\, L_{\nu,x}\right] = -\, W_x\, f_x\,.$$

In other words

$$(4.16)\qquad L_{n,x+1}\, f_{x+1} = f_x \sum_{\nu=0}^{n} C_{n\nu}\, L_{\nu,x} + \begin{cases} \dfrac{W_x}{P_x}\, f_{x+1} \\[2mm] -\dfrac{W_x}{Q_{x+1}}\, f_x\,. \end{cases}$$

At least one of the numerators in the right member of (4.16) is different from zero, and this expression is chosen. Performing a summation over x on (4.16) we get, assuming convergency

$$(4.17)\qquad (1 - C_{nn})\, J_{n,t} = L_{n,t}\, f_t + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n\nu}\, J_{\nu,t} + \sum_{x=t}^{\infty} \begin{cases} \dfrac{W_x}{P_x}\, f_{x+1} \\[2mm] \dfrac{-\,W_x}{Q_{x+1}}\, f_x \end{cases}$$

where $J_{\nu,t} = \sum_{x=t}^{\infty} L_{\nu,x}\, f_x$. For each x in the expression to the extreme right in (4.17) that quantity is chosen for which the numerator (P_x or Q_{x+1}) is different from zero. Of course (4.12) is the special case $W_x = 0$ of (4.17).

5. Improper Multipliers.

Suppose that there is given a set of characteristic multipliers $H_{0,x} \ldots H_{n,x}$ for the frequency distribution f_x. Further let

$$(5.1)\qquad (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \cdots & \alpha_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n0} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

be any non singular (n + 1) rowed matrix with constant elements. This matrix has a reciprocal namely

$$(\overset{*}{\alpha}_{ij}) = \begin{pmatrix} \overset{*}{\alpha}_{00} & \cdots & \overset{*}{\alpha}_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{\alpha}_{n0} & \cdots & \overset{*}{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

where $\overset{*}{\alpha}_{ji}$ is $(-)^{i+j}$ times the expression obtained by leaving out the j-th row and the i-column in (5.1), taking the determinant value of this n rowed matrix and finally dividing by the $(n+1)$ rowed determinant of (5.1). With this notation consider the linear forms in the $H_{j,x}$

$$K_{i,x} = \sum_{j=0}^{n} \overset{*}{\alpha}_{i,j} H_{j,x}.$$

The functions $K_{i,x}$ have the property that the $H_{j,x}$ may be expressed as linear forms in the $K_{i,x}$. We have indeed

$$H_{i,x} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} K_{j,x}. \tag{5.2}$$

Any set of such functions $K_{j,x}$ that are linear forms in the $H_{j,x}$, with constant coefficients forming a non-vanishing determinant, will be called a set of *improper* multipliers for f_x. In distinction to the improper multipliers, the functions $H_{j,x}$ will be called proper multipliers for f_x.

The moments of f_x taken over any set of improper multipliers also satisfy recurrence formulae similar to (4.10) and (4.12), however with different coefficients.

Let

$$N_{\nu,t} = \sum_{x=t}^{\infty} K_{\nu,x} f_x$$

and

$$N_{\nu(t,\omega)} = \sum_{x=j}^{\omega} K_{\nu,x} f_x$$

be the moments of the improper multipliers.

By (5.2) we have

$$M_{i(t,\omega)} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} N_{j(t,\omega)}$$

$$M_{i,t} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} N_{i,t} \tag{5.3}$$

Writing (4.12) in the form

$$M_{n,t} = H_{n,t} f_t + \sum_{i=0}^{n} a_{ni} M_{i,t}$$

and introducing the expression for the $M_{i,t}$ taken from (5.3) we get

$$\Sigma_j \alpha_{nj} N_{j,t} = H_{n,t} f_t + \Sigma_j (\Sigma_i a_{ni} \alpha_{ij}) N_{j,t}$$

that is

$$(5.4) \qquad 0 = H_{n,t} f_t + \sum_{j=0}^{n} b_{nj} N_{j,t}$$

where

$$b_{nj} = \sum_{i=0}^{n} a_{ni} \alpha_{ij} - \alpha_{nj} .$$

Solving (5.4) with respect to $N_{n,t}$ we get

$$(5.5) \qquad (\alpha_{nn} - \sum_{i=0}^{n} a_{ni} \alpha_{in}) N_{n,t} = H_{n,t} f_t + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{nj} N_{\nu,t} .$$

In particular if each $H_{j,t}$ only contains the functions $K_{0,t} \ldots K_{j,t}$ so that $\alpha_{in} = 0$ for $i < n$, the coefficient of $N_{n,t}$ in (5.5) reduces to $\alpha_{nn}(1 - a_{nn})$.

If the α_{ij} are equal to

$$\alpha_{ij} = e_{ij} = \begin{cases} 0 \ (if\ i \neq j) \\ 1 \ (if\ i = j) \end{cases}$$

$N_{i,t}$ reduces to $M_{i,t}$ and the formula (5.5) reduces to (4.12).

As an application of (5.5) consider again the point binomial. Since the powers x^ν ($\nu = 0, 1 \ldots n$) for $n \gtreqless 1$ form a set of proper multipliers for the point binomial, any set of $n + 1$ linearly independent polynomials $K_{0,x} \ldots K_{n,x}$ forms a set of improper multipliers. Any set of more than two polynomial moments in the point binomial (taken over linearly independent polynomials) satisfies therefore a recurrence formula of the kind (5.5).

6. The complete moments.

If the incomplete moments $M_{n,t}$ converge as $t \to -\infty$, we consider the quantities

$$(6.1) \qquad M_\nu = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} H_{\nu,x} f_x .$$

These quantities are called the *complete* characteristic moments. The quantities (6.1) converge certainly if the $H_{\nu,x}$ are finite over any finite range, and f_x zero outside of a given finite range.

Similarly we consider the complete moments

$$N_\nu = \sum_{x=-\infty}^{\infty} K_{\nu,x} f_x .$$

The complete moments M_ν and N_ν satisfy the recurrence formulae

$$(1\text{-}a_{nn})\,M = \sum_{\nu=0}^{n=1} a_{a\nu} M_\nu \quad \text{and}$$

$$\left(\alpha_{nn} - \sum_{i=0}^{n} a_{ni}\,\alpha_{in}\right) N_n = \sum_{\nu=1}^{n-0} b_{n\nu} N_{\nu,\,t}$$

These formulae are obtained from (4.12) and (5.5) by letting t tend towards $-\infty$.

7. The determination of the characteristic numbers.

The characteristic numbers can be expressed in different ways. Amongst others they can be expressed in terms of certain types of complete moments of the distribution.

Let

$$\varphi_{i,x}\;(i = 0, 1 \ldots n)$$

be any set of $n+1$ functions, such that the complete moment

$$U_{ij} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \varphi_{i,x} H_{j,x} f_x \begin{pmatrix} i = 0, 1 \ldots n \\ j = 0, 1 \ldots n \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

$$V_i = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \varphi_{i,x-1} H_{n,x} f_x \;(i = 0, 1 \ldots n) \tag{7.2}$$

converge, and further such that the determinant

$$|U_{ij}| = \begin{vmatrix} U_{00} \ldots U_{0n} \\ U_{n0} \ldots U_{nn} \end{vmatrix}$$

is different from zero.

Multiplying (4.7) by $\varphi_{i,x}$ and performing a complete summation over x we obtain

$$\sum_{j=0}^{n} U_{ij}\,a_{nj} = V_i \qquad (i = 0, 1 \ldots n) \tag{7.3}$$

Since $|U_{ij}| \neq 0$ the system (7.3) may be solved with respect to the a_{nj} which gives

$$a_{nj} = \sum_{j=0}^{n} \overset{*}{U}_{ij} V_j \tag{7.4}$$

where the $\overset{*}{U}_{ij}$ are the elements of the reciprocal of the matrix U_{ij}. We may also write the solution of (7.3) in another form which is more convenient for the application we shall later make of the characteristic numbers. Let $B_0 \ldots B_n$ be any set of numbers. Then we have

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ni} B_i = - \begin{vmatrix} 0 & B_0 \ldots B_n \\ V_0 & U_{00} \ldots U_{0n} \\ \cdots & \cdots \\ V_n & U_{n0} \ldots U_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_{00} \ldots U_{0n} \\ \cdots \\ U_{n0} \ldots U_{nu} \end{vmatrix} \tag{7.5}$$

If we put all the coefficients B in (7.5) equal to zero, except the special coefficient B_i, we get back to the formula (7.4).

It is also possible to express the numbers a_{ni} in terms of the moments

$$X_{ij} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \varphi_{i,x} K_{j,x} f_x$$

and

$$Y_{ij} = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \varphi_{i,x-1} K_{j,x} f_x$$

Inserting from (5.2) into (7.1) and (7.2) we get indeed

$$U_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk} X_{ik}$$

$$V_i = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} Y_{ik}$$

8. Local criteria for the nature of the distribution.

Let (P, Q) be a set of functions defining a class of frequency distributions. Let F_x be a numerically given frequency distribution. We want a criteria expressing if F_x can be looked upon as being *approximately* of the class (P, Q). We may consider two sorts of criteria: Local and total criteria. The local criteria are expressed in terms of the values of F_x in the vicinity of a given point x, and the total criteria are expressed by certain parameters depending on the totality of the values of F_x as expressed by certain complete moments of F_x.

In order to develop such criteria we shall again make use of a set of characteristic multipliers for the class (P, Q). Let $H_{\nu,n}$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ be such a set. These multipliers can be determined, provided only that the set of functions P_x and Q_{x+1} is given, that is to say the $H_{\nu,x}$ may be constructed once for all quite independently of the particular numerically given distribution F_x which it is wanted to study.

If the function F_x belongs rigorously to the class (P, Q), then the function

$$\Psi_x = \frac{F_x}{F_{n+1}} \cdot \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} H_{\nu,x}}{H_{x,n+1}}$$

shall by (4.7) be identically equal to unity. It therefore seems plausible to adopt the closeness with which Ψ_x actually fluctuates around unity as a criterion of how close F_x belongs to the class (P, Q). This is a generalization of the criterion which Professor Guldberg has given for the special distributions considered by him. (1).

In order to construct Ψ_x we must fit the constants $a_{n\nu}$ to the given distribution F_x. A plausible fitting procedure is to require that the general moments (7.1) and (7.2) shall coincide when computed for the ideal distribution f_x that belongs to the class (P,Q) and for the given distribution F_x. By (7.5) this leads to the following expression for Ψ_x

$$(8.1) \qquad \Psi_x = -\frac{F_x}{F_{x+1} H_{n,x+1}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & H_{0,x} & \cdots & H_{n,x} \\ V_0 & U_{00} & \cdots & U_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_n & U_{n0} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_{00} & \cdots & U_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{n0} & \cdots & U_{nn} \end{vmatrix}$$

The local criterion for the fact that F_x belongs approximately to the class (P_x, Q_{x+1}) may then be taken as expressed by the function (8.1) oscillating closely around unity. The functions $H_{0,x} \ldots H_{n,x}$ in (8.1) are a set of characteristic multipliers for the class $(P_x Q_{x+1})$, and V_i and U_{ji} are the complete moments defined by (7.1) and (7.2), where $\varphi_{i,x}$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ is a set of functions that may be selected

(1) Loc. cit. 172.

arbitrarily with the only proviso that the determinant $|U_{ij}|$ shall be different from zero.

If $\Psi_x = 1$, then we also have $\Delta_x = 0$, where

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \Phi_x \; H_{0,x} \ldots H_{n,x} \\ V_0 \; U_{00} \ldots U_{0n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_n \; U_{n0} \ldots U_{nn} \end{vmatrix} \tag{8.2}$$

Φx being equal to

$$\Phi_x = \frac{F_{x+1} H_{n,x+1}}{F_x}. \tag{8.3}$$

The criterion in question may therefore also be expressed by saying that Δ_x *defined by* (8.2) *shall be close to zero for any* x. Since x only occurs in the first row of (8.2) we may formulate the criterion by saying that the function Φ_x defined by (8.3) shall be a linear form in the $H_{0,x} \ldots H_{n,x}$ with constant coefficients. The last formulation of the criterion is of course contained already in the formula (4.7). What is obtained by (8.2) is that we have here an expression for the coefficients of the form.

As an example, consider again the binomial distribution. Here we may select

$$n = 1 \qquad H_{0,x} = 1 \qquad H_{1,x} = x$$

$$\varphi_{0x} = x^g \qquad \varphi_{1x} = x^h$$

g and h being two non negative integers.

This gives

$$M_0 = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f_x \qquad M_1 = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \,.\, f_x$$

The matrix (U_{ij}) is now two rowed and equal to

$$(U_{ij}) = \begin{pmatrix} M_g \; M_{g+1} \\ M_h \; M_{h+1} \end{pmatrix}$$

where we have put for brevity

$$M_i = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^i \,.\, f_x \,.$$

Further the moments V_o and V_1 are

$$V_0 = \sum_{i=o}^{g} (-)^{g-i} \binom{g}{i} M_{i+1}$$

$$V_1 = \sum_{i=o}^{h} (-)^{h-i} \binom{h}{i} M_{i+1}$$

So that

(8.4)
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \Phi_x & 1 & x \\ V_o & M_g & M_{g+1} \\ V_1 & M_h & M_{h+1} \end{vmatrix}$$

where

(8.5)
$$\Phi_x = \frac{(x+1)\,F_{x+1}}{F_x}.$$

The quantities in the second and third row of (8.4) are constants independent of x. Quite generally we may therefore say that *the criterion for a binomial distribution is that the function* Φ_x defined by (8.5) *is approximately a straight line.* The coefficients of this straight line are determined by

(8.6)
$$\Phi_x = \left(\frac{V_o M_{h+1} - V_1 M_{g+1}}{d}\right) - \left(\frac{V_o M_h - V_1 M_g}{d}\right) x$$

where

$$d = \begin{vmatrix} M_g & M_{g+1} \\ M_h & M_{h+1} \end{vmatrix}.$$

The two expressions in parenthesis in the right member of (8.6) ought to be independent of g and h. For $g = 0$, $h = 1$ we get $V_0 = M_1$, $V_1 = - M_1 + M_2$, and hence

(8.7)
$$\Phi_x = \frac{M_1^2}{\mu_2} + \frac{\mu_2 - M_1}{\mu_2} x$$

where

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2$$

μ_2 is the second power moment about the mean.

The formula (8.7) is the local criterion given by Guldberg (1) for the case of the point binomial.

---

(1) Loc. cit. p. 172, the formula given at the bottom of the page.

9. Total criteria for the nature of the distribution.

A total criterion for the fact that a numerically given frequency distribution F_x belongs approximately to a given class may be obtained from the formula

$$M_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} M_\nu$$

simply by introducing the expression for the characteristic numbers taken from (7.5). This gives the general criterion that the number

$$D = \begin{vmatrix} M_n & M_0 & \dots & M_n \\ V_0 & U_{00} & \dots & U_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_n & U_{n0} & \dots & U_{nn} \end{vmatrix}$$

ought to be close to zero.

In the case of the point binomial we have with the notation of the preceding section

$$D = \begin{vmatrix} M_1 & M_0 & M_1 \\ V_0 & M_g & M_{g+1} \\ V_1 & M_h & M_{h+1} \end{vmatrix} \tag{9.1}$$

For $g = 0$ and h arbitrary the two first rows in (9.1) become equal. The selection $g = 0$ does therefore not lead to any condition on F_x.

For $g = 1$ and h arbitrary we get

$$D = \begin{vmatrix} M_1 & M_0 & M_1 \\ (-M_1 + M_2) & M_1 & M_2 \\ V_1 & M_h & M_{h+1} \end{vmatrix}$$

Subtracting here the last row from the first we get

$$D = \begin{vmatrix} 0 & M_0 & M_1 \\ -M_1 & M_1 & M_2 \\ V_1 - M_{h+1} & M_h & M_{h+1} \end{vmatrix}$$

that is to say

$$D = M_1 (M_0 M_{h+1} - M_1 M_h) + (V_1 - M_{h+1}) (M_0 M_2 - M_1^2) .$$

For $h = 1$ this does not give any condition. For $h = 2$ we get, since $M_0 = 1$

$$D = M_1 (M_3 - M_1 M_2) + (M_1 - 2 M_2) (M_2 - M_1^2) . \tag{9.2}$$

The condition that this expression shall be equal to zero is the same as Guldberg's first total criterion (1) namely

$$M_1 \mu_3 = 2 \mu_2^2 - M_1 \mu_2 . \tag{9.3}$$

Indeed introducing in (9.3)

$$\mu_2 = M_2 - M_1^2$$

$$\mu_3 = M_3 - 3 M_1 M_2 + 3 M_1^3$$

we get the condition that the right member of (9.2) shall be equal to zero.

10. Frequency functions defined by a differential equation.

The main ideas of the preceding analysis can be applied also to the case where the frequency function is defined by a differential equation, instead of by a difference equation. Since in the case of a discrete frequency function, the difference equation (1.1) can be written in the form

$$(P_x + Q_{x+1}) f_x + Q_{x+1} \triangle f_x = 0$$

where

$$\triangle f_x = f_{x+1} - f_x,$$

it seems natural to consider, in the continuous case, the differential equation

$$(P_x + Q_x) f_x + Q_x f'_x = 0 \tag{10.1}$$

where

$$f'_x = \frac{d f_x}{d x} .$$

By integrating (10.1) over x from t to ω and noticing that

$$\int_t^\omega Q_x f'_x \, d x = [Q_x f_x]_t^\omega - \int_t^\omega Q'_x f_x \, d x, \quad \text{we get}$$

$$\int_t^\omega (P_x + Q_x - Q'_x) f_x \, d x = Q_t f_t - Q_\omega f_\omega$$

(1) Loc. cit. p. 173.

Consequently if $\lim_{x \to \infty} Q_x f_x = 0$

$$\int_t^\infty (P_x + Q_x - Q'_x) f_x \, dx = Q_t f_t \tag{10.2}$$

This is the tail equation in the continuous case. Any function Q_x inserted in (10.2) furnishes the explicit expression for an incomplete moment. As an example let us consider the Pearson class of frequency functions.

This is the following special case of (10.1)

$$P_x + Q_x = a_0 + a_1 x$$

$$Q_x = -(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$

where the a's and b's are constants. Consequently, for *any* frequency function in the Pearson class there exists an incomplete power-moment of the first order whose explicit expression can be immediately given namely

$$\int_t^\infty (a_0 + b_1 + (a_1 + 2 b_2) x) f_x \, dx = -(b_0 + b_1 t + b_2 t^2) f_t .$$

And, more generally, if Q_x is an arbitrary function we have for any frequency function of the Pearson class

$$\int_t^\infty \left(\frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} Q_x + Q'_x \right) f_x \, dx = - Q_t f_t .$$

Let us put

$$R_x = \frac{P_x}{Q_x}$$

The ratio R_x is determined by the nature of the frequency distribtion. Introducing this ratio we see that the problem of determining the incomplete moment

$$\int_t^\infty L_x f_x \, dx = Q_t f_t$$

is equivalent with the problem of solving the differential equation in Q_x

$$Q'_x = (1 + R_x) Q_x - L_x .$$

In the continuous case we define a characteristic multiplier belonging to the constant a, as a function H_x satisfying

$$Q_x H'_x - (P_x + a Q_x) H_x = 0$$

and we define a set of characteristic multipliers $H_{\nu,x}$ ($\nu = 0, 1 \ldots n$) belonging to the constants $a_{n\nu}$, and a set of functions satisfying

$$(10.3) \qquad Q_x H'_{n,x} - (P_x + a_{nn} Q_x) H_{n,x} = Q_x \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} H_{\nu,x} .$$

Let us for brevity denote by Θ the left member of the equation obtained from (10.3) by carrying all the terms over on the left side. Then we have

$$(10.4) \quad Q_x \left[\frac{d}{dx} (H_{n,x} f_x) + (1 - a_{nn}) H_{n,x} f_x - f_x \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} H_{\nu,x} \right] = f_x \Theta$$

and $(P_x + Q_x)$ times the bracket in (10.4) is equal to $- f'_x \Theta$.

Hence: In any point x where either $Q_x \neq 0$ and f_x finite or $P_x + Q_x \neq 0$ and f'_x finite, we have

$$(10.5) \qquad \frac{d}{dx} (H_{n,x} f_x) + (1 - a_{nn}) H_{n,x} f_x = f_x \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} H_{\nu,x}$$

Let

$$M_{\nu,t} = \int_t^\infty H_{\nu,x} f_x \, dx$$

be the incomplete moments taken over a set of characteristic multipliers. If $\lim_{x \to \infty} H_{n,x} f_x = 0$, the integration $\int_t^\infty dx$ extended to (10.5) gives

$$(1 - a_{nn}) M_{\nu,t} = H_{n,t} f_t + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} M_{\nu,t}$$

This formula is analagous to (4.12).

In order to obtain an expression for the characteristic numbers $a_{n\nu}$ in terms of the integral properties of the frequency function, we introduce the complete moments

$$(10.6) \qquad U_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{i,x} H_{j,x} f_x \, dx$$

$$(10.7) \qquad V_i = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_{i,x} - \varphi'_{i,x}) H_{n,x} f_x \, dx$$

where $\varphi_{i,x}$ ($i = 0, 1 \ldots n$) is any set of functions such that the determinant $|U_{ij}|$ is different from zero. Let us multiply (10.5) by $\varphi_{i,x}$

and perform an integration over x between t and ω. If we use the partial integration

$$\int_t^\omega \varphi_{i,x} \frac{d}{dx}(H_{n,x} f_x)\, dx = [\varphi_{i,x} H_{n,x} f_x]_t^\omega - \int_t^\omega \varphi'_{i,x} H_{n,x} f_x\, dx$$

and then let $t \to -\infty$ and $\omega \to \infty$ we get, on the assumption that.

$$\text{Lim}\ \varphi_{i,x} H_{n,x} f_x = 0 \quad \text{when } x \to \pm\infty$$

(10.8) $$\sum_{j=0}^{n} U_{ij} a_{nj} = V_i \quad (i = 0, 1 \ldots n)\,.$$

The system of linear equations (10.8) is the same as (7.3). The whole analysis of Section 7 therefore applies also to the present continuous case, provided only that the moments U_{ij} and V_i are defined by (10.6) and (10.7) instead of by (7.1) and (7.2).

If F_x is a numerically given frequency distribution, the local criterion for the fact that F_x belongs approximately to a given (P, Q) class defined by the differential equation (10.1), can be formulated thus: Consider the function

$$\Psi_x = \frac{-1}{(1+\theta_x) H_{n,x}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & H_{0,x} & \ldots & H_{n,x} \\ V_0 & U_{00} & \ldots & U_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_n & U_{n0} & \ldots & U_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} U_{00} & \ldots & U_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{n0} & \ldots & U_{nn} \end{vmatrix}$$

where

$$\Theta_x = \frac{d \log (H_{n,x} F_x)}{dx} = \frac{d \log H_{n,x}}{dx} + \frac{d \log F_x}{dx}$$

The criterion is that Ψ_x shall fluctuate closely around unity. Indeed, if F_x belongs rigorously to the class (P,Q), Ψ_x must be equal to unity. This is seen by expressing in (10.5) the constants $a_{n\nu}$ in terms of the complete moments U_{ij} and V_i by the same formulae as those used in Section 7.

The total criteria takes on exactly the same form as in the case of a discrete distribution, provided only that we consider, in the continuous case, U_{ij} and V_i as being defined by (10.6) and (10.7).

L. GALVANI

Sulle curve di concentrazione relative a caratteri non limitati e limitati

1. — Se ciascun valore x di un carattere quantitativo variabile fra λ e Λ $(\lambda < \Lambda)$ si presenta con una densità $\varphi(x)$, ossia se $\varphi(x)\,dx$ è la frequenza con cui il dato carattere assume valori compresi fra x ed $x + dx$, vi è luogo a considerare quella che si dice *curva di concentrazione* del carattere nella data seriazione o distribuzione. Assumendo x come parametro, e p e q come coordinate ortogonali di un punto generico M della curva, le equazioni parametriche di tale curva sono:

$$p = \frac{\int_\lambda^x \varphi(x)\,dx}{\int_\lambda^\Lambda \varphi(x)\,dx}, \qquad q = \frac{\int_\lambda^x x\,\varphi(x)\,dx}{\int_\lambda^\Lambda x\,\varphi(x)\,dx},$$

dove i due termini della prima frazione costituiscono i momenti incompleto e completo di ordine 0, e quelli della seconda i momenti incompleto e completo di ordine 1 della data distribuzione. Utilizzando notazioni di uso comune si può anche scrivere:

$$p = \frac{\mu_0(x)}{\mu_0} = \frac{\int_\lambda^x \varphi(x)\,dx}{N}, \qquad q = \frac{\mu_1(x)}{\mu_1} = \frac{\int_\lambda^x x\,\varphi(x)\,dx}{NA},$$

essendo N ed A la frequenza totale e rispettivamente la media aritmetica del carattere, cosicchè NA costituisce l'ammontare totale del carattere nella data distribuzione.

Si può anche dire, con linguaggio suggerito dal caso di una distribuzione discreta, che ad ogni valore x del carattere corrisponde un punto della curva di concentrazione avente come ascissa p la percentuale (sulla totalità N degli elementi) del numero degli elementi in cui il carattere ha un valore non superiore ad x ; e come ordinata q la percentuale (sull'ammontare totale $N\,A$ del carattere) della quantità di carattere globalmente posseduta dagli elementi in cui esso non supera il valore x.

È ben noto che la curva così definita si stende con continuità dal punto (0, 0) al punto (1, 1) ed è convessa verso l'asse p.

Se la data distribuzione anzichè essere continua, come si è supposto precedentemente, è discreta, nel senso che il carattere x non può assumere qualunque valore compreso fra λ e Λ, ma soltanto un numero finito di valori $x_1, x_2, \ldots x_n$, allora la curva di concentrazione, pur stendendosi ancora dal punto (0, 0) al punto (1, 1) risulta costituita da elementi rettilinei. Precisamente, se ciascuno dei detti valori si presenta rispettivamente per $F_1, F_2, \ldots F_n$ volte ($F_1 + F_2 + + \ldots F_n = N$), la curva di concentrazione si spezza in N elementi rettilinei paralleli all'asse p, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{N}$, e costituenti nell'insieme una scala ascendente ad N gradi. Se invece si immagina che ciascuno dei valori $x_1, x_2, \ldots x_n$, si presenti per un numero di volte tendente all'infinito, allora la curva di concentrazione riacquista, al limite, la continuità, ma si riduce ad una poligonale avente n lati, tanti, cioè, quanti sono i valori distinti effettivamente assunti dal carattere x.

Nella pratica si hanno generalmente distribuzioni del penultimo tipo testè accennato ; senonchè, una volta segnati alcuni punti della curva di concentrazione, questi vengono o interpolati ad occhio, mediante una curva (convessa rispetto a p) passante per essi, oppure congiunti, ciascuno col successivo, mediante i lati di una poligonale ; onde si ha in tutti i casi a che fare con una curva continua di concentrazione (curva propriamente detta o poligonale), il che equivale a immaginare che la distribuzione sia, per astrazione, costituita da infiniti elementi.

2. — La curva di concentrazione di un carattere, introdotta nella metodologia statistica quasi contemporaneamente dal LORENZ, dallo CHATELAIN, dal SÉAILLES e dal GINI (1), e usata poi largamente, spe-

---

(1) M. O. LORENZ, *Methods of measuring the concentration of wealth*, in « Public. of Amer. Stat. Assoc. », N. 70, 1905 ; E. CHATELAIN, *Les successions déclarées en* 1905, « Rev. politique et parlementaire » 1907 ; J. SÉAILLES, *La répartition des fortunes en France*, Paris, Alcan, 1910 ; C. GINI, *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, « Atti del R. Ist. Ven. di S. L. A. » 1913-1914, T. LXXIII, Parte 2ª.

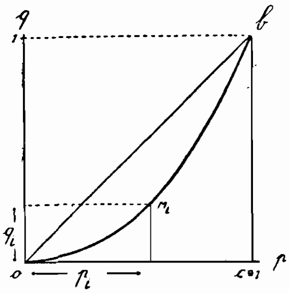


Fig. 1

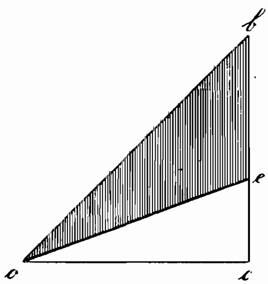


Fig. 2

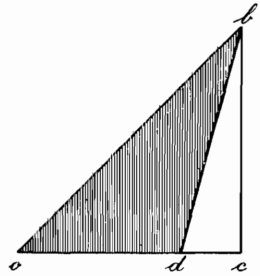


Fig. 3

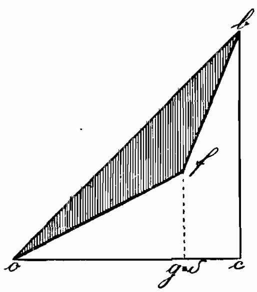


Fig. 4

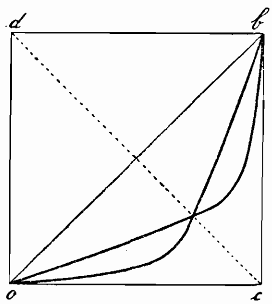


Fig. 5

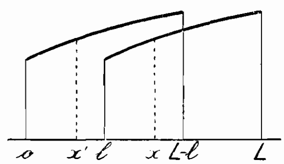


Fig 6

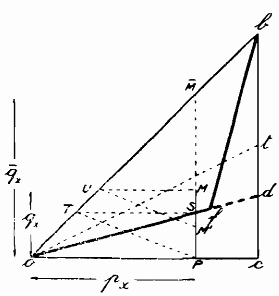


Fig. 7

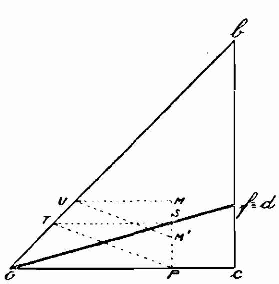


Fig. 8

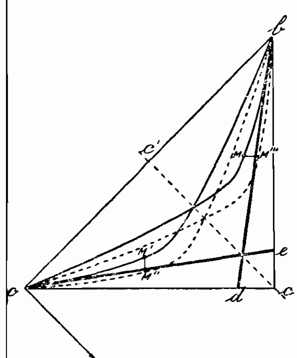


Fig. 9

cie nelle indagini sulla distribuzione dei redditi, dei patrimoni, etc., trae la sua importanza fondamentale dal fatto che la maggiore o minore convessità della curva stessa verso l'asse su cui si misurano i valori di p, è indizio di maggiore o minore concentrazione (o come anche si dice, disuguaglianza o variabilità) nella distribuzione del carattere x considerato. Nel caso di concentrazione nulla, cioè di uniforme distribuzione di x, la curva di concentrazione si riduce al segmento $o\,b$ (Fig. 1) che va dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 1)$ (segmento o retta di equidistribuzione) cioè all'ipotenusa di un triangolo rettangolo $o\,c\,b$ avente i cateti di lunghezza 1, il primo $o\,c$ sull'asse p, a partire dall'origine, il secondo $c\,b$ parallelo all'asse q. Invece nel caso di massima concentrazione, ottenuta supponendo che l'ammontare totale del carattere si concentri in un solo elemento dall'aggregato, la curva di concentrazione degenera nell'insieme $o\,c$ e $c\,b$ dei due cateti anzidetti. In tutti gli altri casi, in quelli cioè di una concentrazione compresa fra questi due casi limiti, la curva si stende da o a b internamente al triangolo $o\,c\,b$ ed è, come si è detto, convessa rispetto all'asse p.

Ora, è vero che la maggiore o minore convessità di tale curva si connette alla maggiore o minore concentrazione del carattere, ma tale convessità non può, da sola, fornire il mezzo per paragonare la concentrazione di un carattere in due diverse distribuzioni, specie quando le due curve di concentrazione si incrociano fra di loro. Per giungere ad una misura della concentrazione bisogna fare un passo di più e cioè considerare, come ha fatto il GINI (2), quella che egli ha chiamato *area di concentrazione*, vale a dire l'area $OM_i\,b$ compresa fra la curva di concentrazione e la retta $o\,b$ di equidistribuzione, e formare poi quello che egli ha detto *rapporto di concentrazione*, ossia il rapporto R di quest'area all'area corrispondente alla massima concentrazione.

Se il carattere che dà luogo alla seriazione non ammette limiti, nè superiore, nè inferiore, l'area di massima concentrazione è quella del triangolo rettangolo $o\,c\,b$ (area uguale a $1/2$), cosicchè il rapporto di concentrazione R risulta senz'altro uguale al doppio dell'area di concentrazione. Ma il GINI ha anche osservato (3) che se x ammette, invece, un limite inferiore l, oppure un limite superiore L, o simultaneamente

---

(2) l. c.

(3) C. GINI, *Sul massimo degli indici di variabilità assoluta e sulle sue applicazioni agli indici di variabilità relativa e al rapporto di concentrazione*, « Metron » Vol. VIII, n. 3, 1930; *Intorno alle curve di concentrazione*, Memoria presentata alla XX^a Sessione dell'Istituto Internazionale di Statistica, Madrid 1931.

un limite inferiore l ed uno superiore L, allora l'area di massima concentrazione è quella di un triangolo (parte di $o\,c\,b$) avente un lato costituito da $o\,b$, ed il vertice opposto rispettivamente situato sopra $c\,b$, oppure sopra $o\,c$, o infine internamente al triangolo $o\,c\,b$. Lo stesso A. ha anche dimostrato un teorema fondamentale nella teoria della concentrazione, consistente in ciò che, qualora il carattere x non sia limitato nè superiormente nè inferiormente, il rapporto di concentrazione R è uguale alla differenza media Δ del carattere nella data distribuzione, divisa per il valore massimo di tale differenza, cioè per il doppio $2A$ della media aritmetica (4). Quando invece esistono limitazioni al valore di x, egli ha dimostrato (5) che il coefficiente di correzione per il quale conviene moltiplicare il doppio $2A$ della media aritmetica al fine di ottenere il massimo valore che la differenza media Δ può assumere è:

$\frac{A-l}{A}$ quando il carattere x ammette soltanto un limite inferiore l e l'area di massima concentrazione sia rappresentata da un triangolo come $o\,e\,b$ (fig. 2);

$\frac{L-A}{L}$ quando x ammette un solo limite superiore L e l'area di massima concentrazione sia rappresentata da un triangolo come $o\,d\,b$ (fig. 3);

$\frac{A-l}{A}\,\frac{L-A}{L-l}$ quando x ammette simultaneamente un limite inferiore l ed uno superiore L, e l'area di massima concentrazione sia rappresentata da un triangolo come $o\,f\,b$ (fig. 4).

Pertanto, facendo uso di tali coefficienti di correzione, si può in tutti i casi dire che il rapporto di concentrazione è uguale alla differenza media divisa per il valore massimo che questa differenza può assumere.

3. — Per quanto riguarda l'uso di questi coefficienti di correzione è opportuno fare le osservazioni seguenti:

a) Sia data una distribuzione nella quale il carattere x varia fra un minimo λ ed un massimo Λ. Per il corretto calcolo di R, bisogna allora distinguere due eventualità: o il carattere x, pure variando nella data distribuzione fra λ e Λ, è di sua natura illimitato inferiormente e superiormente, e allora il rapporto R è senz'altro dato dalla

(4) *Sulla misura della concentrazione* etc., già cit.

(5) *Intorno alle curve di concentrazione*, già cit.

solita formula $R = \dfrac{\Delta}{2\,A}$; oppure il carattere x non potrebbe assumere valori esterni all'intervallo fra $l \leq \lambda$ ed $L \geq \Lambda$, ed allora nel calcolo di R bisogna al denominatore $2\,A$ applicare il coefficiente di correzione $\dfrac{A-l}{A} \cdot \dfrac{L-A}{L-l}$. (Analogamente per il caso di un solo limite inferiore l, e di un solo limite superiore L).

Ciò significa, in sostanza, che *in corrispondenza ad una stessa curva di frequenza, stendentesi fra i valori* λ *e* Λ *del carattere* x, *il rapporto di concentrazione* R *varia correlativamente alle diverse eventualità che il carattere stesso sia illimitato inferiormente e superiormente, oppure sia limitato inferiormente, o limitato superiormente, o limitato inferiormente e superiormente.*

b) Se da una distribuzione nella quale il carattere x (illimitato, per sua natura, inferiormente e superiormente) ammette una certa curva di frequenza $\varphi(x)$, si passa ad un'altra distribuzione definita dalle relazioni $x' = k\,x$, $\varphi(x') = \varphi(x)$, è ovvio che il rapporto di concentrazione non muta, essendo per la prima $R = \dfrac{\Delta}{2A}$ e per la seconda $R' = \dfrac{k\,\Delta}{2\,k\,A} = R$.

Ora si verifica immediatamente che *questa invariabilità del rapporto di concentrazione sussiste anche se il carattere è limitato fra l* ed L, perchè per la prima e per la seconda distribuzione il rapporto di concentrazione è sempre

$$R = \frac{\Delta}{2\,A\,\dfrac{A-l}{A}\,\dfrac{L-A}{L-l}}.$$

c) Si supponga ora data una distribuzione nella quale il carattere x sia, per sua natura, limitato fra l ed L, ed abbia come curva di frequenza $\varphi(x)$; è allora

$$R = \frac{\Delta}{2\,A.\,\dfrac{A-l}{A}.\,\dfrac{L-A}{L-l}} = \frac{\Delta}{2\,(A-l)\,\dfrac{L-A}{L-l}}.$$

Se imprimiamo ai valori del carattere e alla corrispondente curva di frequenza una traslazione di ampiezza d, cioè se passiamo alla distribuzione definita da

$$x' = x + d \qquad \varphi(x') = \varphi(x),$$

intendendo che x' sia limitato fra $l + d$ ed $L + d$, risulterà :

$$R' = \frac{\Delta}{2(A+d)\,\dfrac{(A+d)-(l+d)}{A+d}\cdot\dfrac{(L+d)-(A+d)}{(L+d)-(l+d)}} = R\,,$$

ossia : *il rapporto di concentrazione non varia per una traslazione dei valori del carattere e della corrispondente curva di frequenza, purchè anche i limiti fra cui è per sua natura compreso il carattere, subiscano la medesima traslazione.*

d) Si osservi, infine, che se il carattere è per sua natura limitato fra l ed L, mentre nella distribuzione considerata varia soltanto fra λ e Λ, essendo $\lambda \geq l$ e $\Lambda \leq L$, sarà indifferente scrivere $\int_\lambda^x \varphi(x)\,dx$, $\int_\lambda^x x\,\varphi(x)\,dx$, $\int_\lambda^\Lambda \varphi(x)\,dx$, etc., oppure rispettivamente $\int_l^x \varphi(x)\,dx$, $\int_l^x \varphi(x)\,dx$, $\int_l^L \varphi(x)\,dx$, etc.

4. — Sorge, a questo punto, un problema generale.

Considerata (la curva e) l'area di concentrazione relativa ad una distribuzione nella quale il carattere x sia soggetto a qualche limitazione (o inferiore, o superiore, o bilaterale), come si può trasformare quella curva in un'altra che si possa riguardare come inerente ad un carattere privo di limitazioni, cosicchè il rapporto di concentrazione R risulti senz'altro dato dal quoziente dell'area di concentrazione (racchiusa, insieme con la retta di equidistribuzione, da questa nuova curva) per l'area del solito triangolo rettangolo $o\,c\,b$ (anzichè per quella di un triangolo come $o\,c\,b$ della fig. 2, oppure $o\,d\,b$ della fig. 3, oppure $o\,f\,b$ della fig. 4) ? Il GINI (6) ha proposto di chiamare la nuova curva di concentrazione *curva ridotta*.

Risolveremo il problema supponendo, per semplicità, che la distribuzione del carattere x, soggetto a limitazioni, sia definita da una curva di frequenza $\varphi(x)$, e impiegheremo a tal fine la nozione di *antiserie*, introdotta anch'essa dal GINI (7).

Data una serie nella quale al valore x_i del carattere x corrisponda la frequenza assoluta (o peso) F_i ($F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \ldots = N$), egli dice antiserie la nuova serie che si ottiene sostituendo ad ogni valore x_i il suo reciproco $\frac{1}{x_i}$ e alla rispettiva frequenza (o peso) F_i il

(6) *Intorno alle curve di concentrazione*, già cit.
(7) *Intorno alle curve di concentrazione*, già cit.

prodotto $F_i x_i$. Nel nostro caso, se la serie o distribuzione si riferisce ad un carattere x limitato fra l ed L, la rispettiva antiserie si riferirà ad un carattere $x' = \frac{1}{x}$ limitato fra $\frac{1}{L}$ ed $\frac{1}{l}$ e di cui la densità in x' sarà data da $x\,\varphi(x)$. I momenti completi di ordine 0 della serie e della antiserie saranno rispettivamente

$$\int_l^L \varphi(x)\,dx = N, \quad \text{ed} \quad \int_l^L x\,\varphi(x)\,dx = N A,$$

essendo A la media aritmetica della serie; mentre i momenti d'ordine 1 saranno rispettivamente NA ed A.

Molteplici sono le relazioni che il GINI dimostra intercedere fra una serie e la sua antiserie, e, in particolare, quella che la media aritmetica dell'antiserie è l'inverso della media aritmetica della serie: ma la proprietà di portata essenziale per la costruzione delle curve ridotte di concentrazione consiste in ciò: che una serie e la rispettiva antiserie danno luogo a curve di concentrazione simmetriche rispetto alla retta cd, di equazione $p + q = 1$; e perciò serie e antiserie hanno la stessa area e lo stesso rapporto di concentrazione (fig. 5).

Ciò posto, i casi di riduzione delle curve di concentrazione, che si debbono esaminare, sono tre:

a) il carattere x che dà luogo alla seriazione ammette un limite superiore L ed un limite inferiore l;

b) il carattere x ammette soltanto un limite inferiore l;

c) il carattere x ammette soltanto un limite superiore L.

5. — *Caso* a).

Nella data seriazione sia (fig. 4):

$l \leq x \leq L$
$\varphi(x)$ = densità in x
A = media aritmetica del carattere
N = momento completo di ordine 0.

La massima concentrazione si avrà quando in una parte ξ della serie il carattere abbia valore l e nella residua $N - \xi$ il valore L. Il valore ξ sarà pertanto determinato dall'equazione

$$\xi l + (N - \xi) L = N A$$

da cui

$$\xi = \frac{N(A - L)}{l - L}; \qquad \frac{\xi}{N} = \frac{L - A}{L - l}.$$

D'altra parte la frazione $\frac{\xi}{N}$ è evidentemente rappresentata in figura da $\frac{og}{oc}$; e perciò

$$\frac{gc}{oc} = \frac{N - \xi}{N} = \frac{A - l}{L - l}.$$

Passiamo dalla data seriazione a quella che le corrisponde quando al valore x del carattere venga sostituito il valore $x' = x - l$ e la densità rimanga invariata ; sarà allora per la nuova seriazione :

$$0 \leq x' \leq L - l$$
$$\varphi\,(x') = \varphi\,(x)$$
$A' = A - l =$ valore medio del carattere
$N' = N =$ momento completo di ordine 0.

L'area massima di concentrazione, per la nuova seriazione, sarà quella del triangolo $o\,\delta\,b$ (fig. 4), in cui $\delta\,c$ sta ad oc, come la parte della serie a cui conviene a tal fine attribuire il valore massimo $L - l$ sta alla totalità N della serie, e perciò :

$$\frac{\delta\,c}{o\,c} = \frac{A - l}{L - l}\ ; \text{ cioè } \frac{N\,(A - l)}{L - l}\ ;$$

è dunque, $\delta c = gc$; il che significa che nel passaggio dalla prima alla nuova seriazione il triangolo che rappresenta la concentrazione massima si trasforma mediante trasporto del vertice f in δ, ossia parallelamente a bc, fino ad oc.

Paragoniamo, ora, le due curve di concentrazione.

Per la distribuzione primitiva si ha per definizione

$$p_x = \frac{\int_l^x \varphi\,(x)\,dx}{N}\ ;\ q_x = \frac{\int_l^x x\,\varphi\,(x)\,dx}{N\,A}\ .$$

Per la seconda distribuzione si ha, invece (fig. 6) :

$$p_{x'} = \frac{\int_0^{x'} \varphi\,(x')\,dx'}{N} = \frac{\int_l^x \varphi\,(x)\,dx}{N} = p_x$$

$$q_{x'} = \frac{\int_0^{x'} x'\,\varphi\,(x')\,dx'}{\int_0^{L-l} x'\,\varphi\,(x')\,dx'} = \frac{\int_l^x (x - l)\,\varphi\,(x)\,dx}{\int_l^L (x - l)\,\varphi\,(x)\,dx} = \frac{\int_l^x x\,\varphi\,(x)\,dx - l\,N_x}{N\,A - N\,l} =$$

$$= \frac{\int_l^x x\,\varphi\,(x)\,dx\left(1 - \frac{l\,N_x}{N_x\,.\,A_x}\right)}{N\,A\left(1 - \frac{N\,l}{N\,A}\right)} = q_x\,\frac{A_x - l}{A_x}\,\frac{A}{A - l}\,,$$

dovendosi, intendere, in questa serie di uguaglianze, che N_x ed A_x siano rispettivamente il numero dei termini in cui il carattere ha valore non superiore ad x, e la media aritmetica di siffatta distribuzione parziale.

Riassumendo, la trasformazione che conviene applicare alla curva di concentrazione relativa al caso *a*) per ottenere quella relativa al caso *c*) è

$$(1)\quad \begin{cases} p_{x'} = p_x \\ q_{x'} = q_x \dfrac{A}{A_x} \dfrac{A_x - l}{A - l} . \end{cases}$$

Geometricamente, sia M un punto arbitrario della curva di concentrazione corrispondente a un certo valore x del carattere della distribuzione iniziale; per ottenere il suo trasformato mediante le (1), si noti che se in tutta la distribuzione il carattere conservasse costantemente il valore A_x, cioè quello che è il valore medio nella distribuzione parziale fino ad x, allora sarebbe

$$\frac{A}{A_x} = \frac{N A}{N A_x} = \frac{c h}{c t} ;$$

mentre sottraendo l ad ogni valore di x si avrebbe

$$\frac{A_x - l}{A - l} = \frac{N (A_x - l)}{N (A - l)} = \frac{d t}{d h} .$$

Posto allora

$$\bar{q}_x = q_x \cdot \frac{A}{A_x} = q_x \frac{c h}{c t} , \text{ verrà } \bar{q}_x : q_x = c h : c t ,$$

cosicchè $\bar{q}_x = P \overline{M}$; e successivamente $q_{x'} = \bar{q}_x \dfrac{A_x - l}{A - l} = P \overline{M} \cdot \dfrac{d t}{d h}$,

da cui $q_{x'} : P\overline{M} = dt : dh = SM : S\overline{M}$ ed anche $q_{x'} : P\overline{M} = TU : T\overline{M}$, essendo $M U$ ed $S T$ due parallele qualunque, purchè secanti la *ob*. Questa proporzione fornisce, senz'altro, secondo la semplice costruzione indicata nella fig. 7, cioè conducendo TP e mandando la UM' parallela a TP,

$$q_{x'} = P M' .$$

Abbiamo così dimostrato che il caso *a*) è riducibile al caso *c*) ed abbiamo anche stabilito sia il procedimento analitico, sia quello geometrico per ottenere la nuova curva di concentrazione.

6. — *Caso* b).

Se nella serie data il carattere x ammette soltanto un limite inferiore l, possiamo pensare che sia contenuto fra l e ∞, e quindi eseguire la riduzione di questo caso all'altro in cui il limite inferiore sia nullo procedendo come ad a). Perciò le formule di trasformazione dal caso b) al caso in cui il limite inferiore sia nullo, sono quelle stesse (1) stabilite in a). Il passaggio da un punto generico M della curva di concentrazione primitiva al corrispondente M' della nuova curva si effettua (fig. 8) con la stessa costruzione data in a), e cioè conducendo per M ed S due parallele arbitrarie MU ed ST che incontreranno ob in T ed U, e mandando poi per U la parallela UM' alla TP, fino ad incontrare in M' l'ordinata PM. Il punto M' è il trasformato di M. Si noti che la curva di concentrazione primitiva risultava interna al triangolo di massima concentrazione ofb, tale che cf sta a cb come la quantità minima di carattere posseduta dalla totalità degli elementi della serie, e cioè Nl sta all'ammontare totale del carattere NA ossia

$$\frac{cf}{ch} = \frac{l}{A} .$$

7 — *Caso* c).

Rimane soltanto da vedere come, data la curva di concentrazione relativa ad una serie nella quale il carattere x ammetta un limite superiore L, si possa ottenere la corrispondente curva di concentrazione ridotta.

La curva iniziale di concentrazione si stende internamente a un triangolo ottusangolo odb di massima concentrazione (fig. 9), dove dc sta ad oc come la parte della serie a cui conviene a tal fine attribuire il valore massimo L, sta alla totalità N degli elementi della serie, e perciò $\dfrac{dc}{oc} = \dfrac{A}{L}$.

Per passare alla curva di concentrazione ridotta, insieme con la serie data (in cui il carattere è compreso fra 0 ed L) si consideri l'antiserie corrispondente (prima serie ausiliaria), in cui il carattere sarà quindi compreso fra $\dfrac{1}{L}$ e ∞ .

Di tale antiserie si potrà senz'altro tracciare la curva di concentrazione $OM'b$ come simmetrica della curva di concentrazione primitiva oMb rispetto alla retta cc' (cfr. n. 2); e tale curva si stenderà internamente a un triangolo $o\ e\ b$, tale, (cfr. n. 4), che sia

$$\frac{ce}{cb} = \frac{\text{lim. infer. antiserie}}{\text{media arit. antiserie}} = \frac{1:L}{1:A} = \frac{A}{L} .$$

La *oe* è pertanto la simmetrica della *bd* rispetto al solito asse di simmetrica *cc'*.

Ciò posto, passando dalla antiserie considerata (e in cui, dunque, il carattere è compreso fra $\frac{1}{L}$ e ∞) a quella in cui il limite inferiore del carattere sia 0 (seconda serie ausiliaria) si avrà una curva di concentrazione $OM''b$ ottenibile dalla $OM'b$ con lo stesso procedimento descritto a *b*). Infine, della seconda serie ausiliaria si immagini costruita l'antiserie, in cui il carattere sarà compreso per 0 e ∞, e la cui curva di concentrazione $OM'''b$ sarà la simmetrica della $OM''b$, rispeto all'asse *cc'*.

La $OM'''b$ è la curva di concentrazione cercata.

Si noti che essa avrebbe potuto ottenersi più rapidamente applicando, senz'altro, alla curva fondamentale OMb la trasformazione descritta a *b*), dopo aver scambiato fra di loro gli assi di riferimento *co* e *cb*. Ma il passaggio attraverso le due serie ausiliarie considerate (antiserie e sua trasformata) consente di cogliere giustamente il significato della trasformazione eseguita.

Come si vede, le successive fasi della costruzione geometrica che permette di ottenere da una curva di concentrazione la corrispondente curva ridotta sono sempre sostanzialmente le stesse, salvo a considerare i due assi di riferimento *co* e *cb* in un certo ordine o nell'ordine opposto.

Si noti pure che il GINI (8) ha mostrato l'opportunità che una curva di concentrazione venga talora riferita, anzichè ai soliti assi p e q, agli assi $z = ob$, costituito dalla retta di equidistribuzione, ed y perpendicolare a z in o (fig. 9); ed ha altresì fatto vedere che le semplici formule di trasformazione dalle consuete a queste nuove coordinate sono $z = p + q$, $y = p - q$. Ne segue che, indicando con z' e y' le coordinate del punto M' che sulla curva di concentrazione ridotta corrisponde al punto M della curva di concentrazione iniziale, le formule di trasformazione (1) diverranno:

$$(2) \quad \begin{cases} z' = p_{x'} + q_{x'} = p_x + q_x \dfrac{A}{A_x} \dfrac{A_x - l}{A - l} \\[2ex] y' = p_{x'} - q_{x'} = p_x - q_x \dfrac{A}{A_x} \dfrac{A_x - l}{A - l} \end{cases}$$

---

(8) *Intorno alle curve di concentrazione*, già cit.

e poichè

$$(3)\quad \begin{cases} z = p_x + q_x \\ y = p_x - q_x \end{cases},$$

così eliminando p_x e q_x fra le (2) e (3), risulterà :

$$(4)\quad \begin{cases} z' = \frac{1}{2}(z+y) + \frac{1}{2}(z-y)\frac{A}{A_x}\frac{A_x - l}{A - l} \\ y' = \frac{1}{2}(z+y) - \frac{1}{2}(z-y)\frac{A}{A_x}\frac{A_x - l}{A - l} \end{cases},$$

le quali costituiscono le formule di trasformazione nel nuovo sistema di riferimento ora accennato.

Naturalmente, se il carattere x che dà luogo alla serie è limitato tanto inferiormente che superiormente, il passaggio alla curva di concentrazione ridotta si otterrà come prodotto di due trasformazioni del tipo indicato, una per la eliminazione del limite inferiore, e l'altra per l'eliminazione del limite superiore.

Résumé.

Le prof. Gini a démontré que, étant donnée une certaine distribution d'un caractère quantitatif, sa courbe de concentration, et partant aussi le rapport de concentration, varient selon que l'on suppose que le caractère en question ne soit pas borné, ou qu'il soit borné inférieurement ou supérieurement ou encore des deux côtés. Le même A. a démontré que dans le premier cas le rapport de concentration R est déterminé par $\frac{\Delta}{2A}$, où Δ représente la différence moyenne et A la moyenne arithmétique du caractère ; tandis que dans les trois derniers cas, pour calculer exactemente la valeur R, il faut appliquer au dénominateur $2A$ un coefficient de correction convenable.

Dans cette note, on formule premièrement quelques observations sur l'influence que subit le rapport de concentration lorsque l'on applique à la distribution donnée certaines transformations. Une étude particulière est ensuite exposée sur le problème analytique et géométrique de transformer la courbe de concentration relative à un caractère borné, dans la courbe réduite correspondante, c.-à.-d. dans une courbe de concentration ayant le même rapport de concentration, mais que l'on puisse considérer comme concernant un caractère quantitatif non borné.

WILLIAM DOWELL BATEN

Frequency Laws for the Sum of *n* Variables which are Subject each to given Frequency Laws

INTRODUCTION.

It is the object of this article to find frequency laws for the sum of n independent variables, which are continuous and which have known continuous frequency laws. Laws for the sum of the variables will be found by use of results obtained by DODD (1).

Considerable work had been done along this phase of probability. CZUBER (2), using the Gaussian law for the individual variables obtained the law for the sum of the variables and also a law for the sum of the squares of the variables. MAYR (3) secured frequency laws for the sum, but in many cases restricted the individual variables to take on only positive values. $F(x_i) = 1/d$, where d is a constant, was used frequently. MISES discovered frequency laws for the sum of the variables, where the number of variables is taken very large, in fact approaches infinity (4). These are of course approximations. DODD also found probability functions for the asymptotic case (5); and used laws for the sum in comparing the arithmetic

(1) *The Frequency Law of a Function of one Variable*, by DODD. "Am. Math. Sc. Bul." 31, (1925), pages 27-31.

The Frequency Law of a Function of Variables with given Frequency Laws, by DODD. "An. of Math." 2 ser. vol. 27, No. 1.

(2) *Theorie der Beobachtungsfehler*, by CZUBER, 1891, pages 72-150.

(3) *Wahrscheinlichkeitsfunktionen und ihre Anwendungen*, by MAYR. "Monatshefte für Math. und Phys." Vol. 30.

(4) *Fundamentalsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, by MISES. "Math. Zeitschrift" 1919, Vol. 4, pages 1-97.

(5) *Functions of Measurements under General Laws of Error*, by DODD. "Sartryck ur Skandinavisk Aktuarietidskrift". 1922.

mean with other functions of the measurements, such as the geometric mean, root-mean-square and the median (6). POINCARÉ derived laws for the sum by using his characteristic functions (7).

GENERAL METHOD.

Let x_i be subject to the frequency law $f_i(x_i)$ which is defined in some interval and whose definite integral over this interval is unity. In many cases considered this interval is $(-\infty, \infty)$. Each variable x_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, is subject to the same law for the particular problem. The following theorem was used for determining the probability or frequency law for the sum (1).

Let $f_i(x_i)$ be the frequency function for x_i, where $i = 1, 2, \ldots,$ n, these functions being non-negative and integrable from minus infinity to plus infinity with result unity. Set

$$C_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) \cos(t x_i)\, d x_i \;;\; S_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) \sin(t x_i)\, d x_i \;;$$

$$r_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2} \;;\; \theta_i = \text{arc sin}\,(S_i/r_i) = \text{arc cos}\,(C_i/r_i) \;;$$

$$R = \prod_{i=1}^{n} r_i \;;\; \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Let $f_1(x_1)$ be of limited variation, and let each f be either continuous or of limited variation. Then the probability $P(u)$ that

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n \leq u,$$

is

$$P(u) = 1/2 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} R \sin(u t - \theta)\, d t/t.$$

If futhermore $f_2(x_2)$ is of limited variation

$$p(u) = d P/d u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} R \cos(u t - \theta)\, d t.$$

The detailed work will be given for two cases, while results for

---

(6) *The Probability of the Arith. Mean compared with that of other Functions of the Measurements*, by DODD. " An. of Math. ", Vol. 14, 1913, pages 186-198.

(7) *Calcul des Probabilités*, by POINCARÉ, 1912.

other cases will be exhibited in a table. $p(u)$ will be used instead of $P(u)$.

Case I.

Let $f_1(x_1) = f_2(x_2) = \ldots = f_n(x_n) = \frac{2h}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 + h^2 x_i^2)^2}$, where $f_i(x_i)\, d\, x_i$ is the probability that x_i lies in $(x_i, x_i + d\, x_i)$. The area under the curve $f_i(x_i)$ between x_i and $x_i + d\, x_i$ represents the probability that x_i lies in this interval.

Each variable has its own probability law. Here all of the laws are the same. The problem here is to find a function which is non-negative such that the area under the graph of this function between u and $u + d\, u$ will represent the probability that the sum

$$u \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq u + d\, u\,.$$

From the theorem

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = \frac{2h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t\, x_i)\, d\, x_i}{(1 + h^2 x_i^2)^2} = \frac{h + t}{h} \cdot e^{-t/h}\,;$$

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = \frac{2h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t\, x_i)\, d\, x_i}{(1 + h^2 x_i^2)^2} = 0\,;$$

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \frac{(h + t)\, e^{-t/h}}{h}\quad;\quad \theta_i = 0\,;$$

$$R = C_i^n = \frac{(h + t)^n\, e^{-n t/h}}{h^n}\,, \theta = 0\,.$$

$$p_n(u) = \frac{1}{h^n \pi} \int_0^{\infty} (h + t)^n\, e^{-n t/h} \cos(u\, t)\, d\, t,$$

or

$$p_n(u) = \frac{1}{h^n \pi} \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} \frac{h^{n+1}\, \Gamma(r) \cos(r\,.\, \mathrm{arc}\tan h\, u/n)}{(n^2 + h^2 u^2)^{r/2}}\,,$$

which is the required probability.

If n is equal to 2 and 3, $p_n(u)$ becomes

$$p_2(u) = \frac{4h\,(20 + h^2 u^2)}{\pi\,(2^2 + h^2 u^2)^3}\,,$$

and

$$p_3(u) = \frac{6h(1053 + 54h^2u^2 + h^4u^4)}{\pi(3^2 + h^2u^2)^4}.$$

These prove to be probability functions for they are non-negative with integral from $-\infty$ to $+\infty$ equal to unity. The interval here is $(-\infty, +\infty)$ because the sum of the variables may have any real value.

Case 2.

Let $f_i(x_i) = (h/4 + (h^2/4)|x_i|)e^{-h|x_i|}$ be the probability that x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, lies in the interval $(x_i, x_i + dx_i)$; find the probability that

$$u \leqq x_1 + x_2 \ldots + x_n \leqq u + du.$$

From the theorem

$$C_1 = C_2 \ldots = C_n = \int_{-\infty}^{\infty} (h/4 + (h^2/4)|x_i|)\cos(tx_i)\,dx_i = \frac{h^4}{(h^2+t^2)^2};$$

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 0;\ \theta_1 = \theta_2 = \ldots \theta_n = 0;$$

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \frac{h^4}{(h^2+t^2)^2};\ \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 0;$$

$$R = \frac{h^{4n}}{(h^2+t^2)^{2n}}$$

Then

$$p_n(u) = \frac{h^{4n}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos(tu)\,dt}{(h^2+t^2)^{2n}},$$

which is the probability that $u \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq u + du$.

For different values of n the above integral can be integrated. For n equal 2 and 3

$$p_2(u) = \frac{h}{96}(15 + 15h|u| + 6h^2u^2 + h^3|u|^3)e^{-h|u|},$$

$$p_3(u) = \frac{h}{5!2^6}(945 + 945h|u| + 420h^2u^2 + 105h^3|u|^3 + $$

$$+ 15h^4u^4 + h^5|u|^5)e^{-h|u|}.$$

EVALUATION OF A USEFUL INTEGRAL.

Since several probability functions come out in the form of an integral similar to $\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(h^2+x^2)^n}$, it seems worth while to find a general law for integrating such integrals. This can be changed to the form $\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n}$. Integrate $\frac{e^{i\,u\,z}}{(1+z^2)^n} = f(z)$ around the contour C, which encloses the singular point $z = i$ (1). The residue of $f(z)$ at this singular point is the value of $\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_C f(z)\,dz$; this residue is also equal to the coefficient of z^{-1} in the Laurent expansion of $f(z)$ in a power series. The residue of $f(z)$ at i is the same as the residue of $f(i+w)$ at $w = 0$.

$$f(i+w) = \frac{e^{-u}\,e^{i\,u\,w}}{(1-1+2\,i\,w+w^2)^n} = \frac{e^{-u}\,e^{i\,u\,w}}{2^n\,w^n\,i^n\left(1-\frac{i\,w}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{e^{-u}\,e^{i\,u\,w}\left(1-\frac{i\,w}{2}\right)^{-n}}{2^n\,w^n\,i^n} = \frac{e^{-u}}{2^n\,w^n\,i^n}\left\{1+i\,u\,w-\frac{u^2\,w^2}{2\,!}-\right.$$

$$\left.-\frac{i\,u^3\,w^3}{3\,!}+\frac{u^4\,w^4}{4\,!}\cdots\right\}\left\{1+\binom{-n}{1}\left(\frac{-\,i\,w}{2}\right)+\binom{-n}{2}\left(\frac{-\,i\,w}{2}\right)^2\cdots\right\}$$

$$= \frac{e^{-u}\,w^{n-1}}{2^n\,w^n\,i^n}\left\{\frac{\binom{-n}{n-1}(-i)^{n-1}}{2^{n-1}\,0\,!}+\frac{\binom{-n}{n-2}(-i)^{n-2}\,i\,u}{2^{n-2}\,1\,!}+\right.$$

$$+\frac{\binom{-n}{n-3}(-i)^{n-3}\,i^2\,u^2}{2^{n-3}\,2\,!}+\ldots+\frac{\binom{-n}{2}(+i)^{n-3}(-i)^2\,u^{n-3}}{2^2\,(n-3)\,!}+$$

$$\left.+\frac{\binom{-n}{1}(-i)\,i^{n-2}\,u^{n-2}}{2^1\,(n-2)\,!}+\frac{\binom{-n}{0}\,u^{n-1}\,i^{n-1}}{2^0\,(n-1)\,!}\right\}+\ldots\,.$$

---

(1) The contour C consists of x — axis from $-R$ to $+R$, the upper half of the circle where $|z| = R$. R is allowed to approach infinity.

The terms involving w^{-1} are only considered. This reduces to

$$\frac{e^{-u}}{2^n i}\left\{\frac{n^{(-\overline{n-1})}u^0}{2^{n-1}\,0\,!\,(n-1)\,!}+\frac{n^{(-\overline{n-2})}u^1}{2^{n-2}\,1\,!\,(n-2)\,!}+\frac{n^{(-\overline{n-3})}u^2}{2^{n-3}\,2\,!\,(n-3)\,!}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{n^{(-2)}u^{n-3}}{2^2\,(n-2)\,!\,2\,!}+\frac{n^{(-1)}u^{n-2}}{2^1\,(n-2)\,!\,1\,!}+\frac{n^{(-0)}u^{n-1}}{2^0\,(n-1)\,!\,0\,!}\right\}w^{-1}.$$

The residue of $f(i+w)$ at $w=0$ is the coefficient of w^{-1}, which reduces to

$$\frac{e^{-u}}{2^n i}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n^{(-r)}u^{n-1-r}}{2^r\,(n-1-r)\,!\,r\,!}\,,\ \text{where } n>0. \quad (1)$$

The residue is also the value of $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$; hence

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz=\frac{e^{-u}}{2^n i}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n^{(-r)}u^{n-1-r}}{2^r\,(n-1-r)\,!\,r\,!}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(ux)\,dx}{(1+x^2)^n}=\frac{e^{-u}}{2^n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n^{(-r)}u^{n-1-r}}{2^r\,(n-1-r)\,!\,r\,!}\,,\quad \text{where } u>0\,.$$

This integral was evaluated by B. DE HAAN AS an infinite series. The above evaluation contains only a finite number of terms. This integral was evaluated by another method by SERRET (2).

Since the above integral has been found, the probability for the sum of the n variates, mentioned in Case 2, can be found at once for any n.

Case 3.

Let it be required to find the probability that

$$u\leqq\sum_{i=1}^{n}x_i\leqq u+du\,,$$

where the probability for x_i is $f_i(x_i)=\frac{\pi}{2}e^{-h|x_i|}$. According to the

(1) $n^{(-r)}=(n)\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r-1)$, $n^{(-0)}=1$.

(2) *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*, by SERRET. Vol. 2, 1894, pages 199, 131.

theorem

$$p_n(u) = \frac{h^{2n}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ut)\,dt}{(h^2+t^2)^n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ut)\,dt}{\left\{1+\left(\frac{t}{h}\right)^2\right\}^n}.$$

Let $hy = t$, then $dt = h\,dy$ and

$$p_n(u) = \frac{h}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(huy)\,dy}{(1+y^2)^n}.$$

According to the above general formula for integrating this kind of integral

$$p_n(u) = \frac{h}{2^n}\sum_{r=0}^{n-i} \frac{n^{(-r)}\,|hu|^{n-1-r}}{2^r\,(n-1-r)!\,r!}\,e^{-h|u|}.$$

It is necessary to introduce the absolute value signs since the general formula for evaluating this integral is true when $u > 0$.

Mayr (3) considered this case and found a long process of discovering the law for the sum, but gave no general formula for any n. The above method, by using the integral developed, gives results with little difficulty.

If to each variable x_i the constant k is added and each variable is subject to the Gaussian law $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, then the law for the sum

$$(x_1+k)+(x_2+k)+\ldots+(x_n+k)$$

is

$$p_n(u) = \frac{h}{\sqrt{n\pi}}\,e^{-h^2(u-nk)^2/n}.$$

Law for the Sum of the Squares of the Variables.

Let the individual variables be subject to the Gaussian law $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, with precision h, and let it be required to find the probability that

$$u \leq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq u + du.$$

Using the theorem mentioned above

$$C_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x_i^2} \cos\,(t\,x_i^2)\,d\,x_i = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan} t/h^2\right)}{h^{-1}\,(h^4 + t^2)^{1/4}} \;;$$

$$S_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x_i^2} \sin\,(t\,x_i^2)\,d\,x_i = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan} t/h^2\right)}{h^{-1}\,(h^4 + t^2)^{1/4}} \;;$$

$$r_i = \frac{h}{(h^4 + t^2)^{1/4}}\,,\quad \theta_i = (1/2 \operatorname{arc\,tan} t/h^2 = \beta\,;$$

$$R = \prod_{i=1}^{n} r_i = \frac{h^n}{(h^4 + t^2)^{n/4}}\,,\quad \theta = n\,\beta\,;$$

$$p_n\,(u) = \frac{h^n}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\,(u\,t - n\,m)\,d\,t}{(h^4 + t^2)^{n/4}}\,,\quad \text{where } 2\,m = \operatorname{arc\,tan} t/h^2\,.$$

$$p_n\,(u) = \frac{h^n}{\Gamma\,(n/2)}\,u^{n/2-1}\,e^{-h^2 u}\,.$$

This shows that the frequency law for the sum of the squares is not a Gaussian law when the individual variables are subject to the Gaussian law. It is a Type 3 frequency law.

MEASURE OF PRECISION.

In the Gaussian law $f_i\,(x_i) = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h_i^2 x_i^2}$, h_i is considered to be the "measure of precision". Since the mean deviation is $\frac{1}{h_i\sqrt{\pi}}$, and the second moment about the mean is $1/2\,h_i^2$, h_i is considered as the measure of precision for the larger h_i is, the smaller the dispersion and standard deviation. If the variables x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, are each subject to the Gaussian law with measure of precision h_i, then the sum of the variables is also subject to the Gaussian law with measure of precision H, where

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + + + + + + + + \frac{1}{h_n^2}\,.$$

Proof : According to the theorem which is used for finding the law for the sum

$$p_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi \Sigma \frac{1}{h_i^2}}} e^{-\frac{u^2}{\Sigma 1/h_i^2}} = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 u^2} .$$

This has been proven by other, but this method seems to be the simplest.

According to this method of finding the probability law for the sum, the law for the weighted mean

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_n x_n ,$$

where $\Sigma p_i = 1$, is

$$p_n(u) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 u^2} \quad , \text{ where } \frac{1}{H} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{h_i^2}} ,$$

provided the individual variables are subject to the Gaussian law with precision h_i. In this case the law for the quantity $p_i x_i$ must be found. If the probability function for x_i is $f_i(x_i) = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 x_i^2}$, the probability function for $p_i x_i$ is, according to reference (1), $F_i (p_i x_i) = \frac{h^i}{p_i \sqrt{\pi}} e^{-(h_i/p_i)^2 x_i^2}$.

If the frequency law of the individual variable is $f_i(x_i) = \frac{h_i}{\pi} \frac{1}{1 + h_i^2 x_i^2}$, where h_i enters the function as a variable parameter, then the variable parameter which occurs in the frequency law for the sum of n variables is $1/H$, where

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + + + + + + + + \frac{1}{h_n}.$$

This is similar to the result obtained when the individual variables were subject to the Gaussian function.

If the variable x_i is subject to the law $f_i(x_i) = \frac{h_i}{1} e^{-h_i |x_i|}$, where

h_i is the variable parameter, then the law for the sum of n independent variables is

$$p_n(u) = \frac{\prod_{i=1}^{n} h_i^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\,dt}{\prod_{i=1}^{n}(h_i^2 + t^2)}.$$

If this is broken up into partial fractions and integrated it becomes

$$p_n(u) = \frac{K}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} Q_i e^{-h_i|u|},$$

where

$$K = \prod_{i=1}^{n} h_i^2, \quad Q_i = \frac{1}{\prod_{s=1}^{i-1}(h_s^2 - h_i^2) \prod_{s=1}^{n-1}(h_{i+s}^2 - h_i^2)\, h_i},$$

where $i + s < n - 1$, and any parenthesis with $h_0^2 = 1$. It is assumed that all of the h_i's are distinct. If several were equal the fraction would be broken up into different partial fractions and of course $p_n(u)$ would be different. Here the variable parameter enters into the law for the sum in a rather complicated way.

Charlier Development of Certain Frequency Functions.

Case 1.

The frequency function for the sum of the squares of n independent variables, when each variable is subject to the Gaussian function can be exhibited in a manner similar to a Charlier series. Consider this function in the integral form.

$$p_n(u) = \frac{h^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut - nm)\,dt}{(h^4 + t^2)^{n/4}}. \quad \text{(See page 7).}$$

$$p_2(u) = h^2 \left\{ \frac{h^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\,dt}{(h^4 + t^2)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t \sin(ut)\,dt}{(h^4 + t^2)} \right\}.$$

Let

$$F_i(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,t)\,d\,t}{(h^4+t^2)^i},$$

then

$$p_2(u) = \left\{h^2 F_1(u) - F_1'(u)\right\} h^2 = h^2 (h^2 - D)\, F_1(u),$$

where D is an operator and represents differentiation.

$$p_4(u) = \left\{\frac{h^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,t)\,d\,t}{(h^4+t^2)^2} + \int_0^\infty \frac{2\,h^2\,t\sin(u\,t)\,d\,t}{\pi\,(h^4+t^2)^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^2\cos(ut)\,d\,t}{(h^4+t^2)^2}\right\} h^4,$$

$$p_4(u) = \left\{h^4 F_2(u) + 2\,F_2'(u)\,h^2 - F_2''(u)\right\} h^4 = h^4 (h^2 - D)^2\, F_2(u).$$

Similarly

$$p_{2n}(u) = h^{2n}(h^2 - D)^n\, F_n(u).$$

The operator D raised to a power k represents the k-th derivative. This is similar to a Charlier series since the function is expressed as the sum of the first term and its derivatives. Here the series is finite and the coefficients are coefficients in the binomial expansion. It must be noted that the above is only for values of n when it is an even integer.

$$\text{Let } G_i(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ut)\,(h^4+t^2+h^2)^{1/2}\,d\,t}{2\,(h^4+t^2)^{i/4}},\quad i = \text{odd integer},$$

$$Z_i(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(u\,t)\,(h^4+t^2-h^2)^{1/2}\,d\,t}{2\,(h^4+t^2)^{i/4}}$$

then

$$p_{2n+1}(u) = \left\{(h^2-D)^{n+1} G_{2n+1}(u) + (h^2-D)^{n+1} Z_{2n+1}(u)\right\} h^{2n+1}.$$

$p_n(u)$ with odd integer subscript is the sum of two series.

When each variable is subject to the frequency function $h^2 e^{-h x_i} x_i$, which is defined over $(0, \infty)$, then the frequency function for the sum of n independent variables is

$$p_n(u) = \frac{h^{2n}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,t - n\,\theta)\,d\,t}{(h^2+t^2)^n},\qquad \cos\theta = \frac{h^2-t^2}{h^2+t^2},$$

$$p_2(u) = \frac{h^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{(h^4 - 6\,h^2 t^2 + t^2)\cos(u\,t)\,dt}{(h^2+t^2)^4} + \frac{h^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{(4\,h^3 t - 4\,h t^3)\sin(ut)\,dt}{(h^2+t^2)^4}.$$

Let

$$F_i(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,t)\,d\,t}{(h^2+t^2)^i},$$

then

$$p_2(u) = h^4(h - D)^4 F_4(u).$$

$$p_n(u) = h^{2n}(h - D)^{2n} F_{2n}(u),$$

which is similar to a Charlier series, because each term after the first is a function of the derivatives of this term.

If the law for the individual variables is $\frac{h^r}{\Gamma(r)}\, e^{-h x} x^{r-1}$, where $r > -1$, then the law for the sum of n variables is

$$p_n(u) = \frac{h^{nr}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,t - n\,r\,k)\;d\,t}{(h^2+t^2)^{nr/2}}, \quad \text{where } k = \text{arc tan} t/h.$$

For different values of r and n this can be expressed in a Charlier series where the series contains only a finite number of terms. The individual variables are defined for this last case in the interval $(0, \infty)$.

It seems of interest to be able to express certain probability functions which have only a finite number of terms into a series which has also a finite number of terms, where each term after the first term is equal to a determined coefficient multiplied by a derivative of the first term. The last case given suggests that there are many such probability functions.

Evaluation of Useful Integrals.

Since

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n^{(-r)}\,u^{n-1-r}\,e^{-u}}{2^r\,(n-1-r)!\,(r)!},$$

the value of integrals

$$(A) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^k \sin(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n}, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^k \cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n}$$

can be found by differentiating the above with respect to u. Let

$$p_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n}, \quad q_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x \sin(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n},$$

then

$$(2) \qquad q_{n+1}(u) = \frac{u}{2\,n}\,p_n(u).$$

Hence it is not difficult to evaluate $q_n(u)$.

Differentiating (2) with respect to u

$$q'_{n+1}(u) = \frac{p_n(u)}{2\,n} + \frac{p'_n(u)\,.\,u}{2\,n}, \text{ or}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\,n\,\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n} - \int_0^\infty \frac{u\,x \sin(u\,x)\,d\,x}{2\,n\,\pi\,(1+x^2)^n},$$

which makes possible the evaluation of the left member since both terms in the right member are now known.

By successive differentiation of (2) the integrals (A) can be evaluated. It is understood that k must not be so that the integrals do not exist. k must be > -2 in fact, $k \not> 2\,n$.

The above integrals appear in finding frequency laws for functions of the n variables, in the Dodd method. In the law for the sum of the squares they must be evaluated.

Let

$$p_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n},\ q_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x \sin(u\,x)\,d\,x}{(1+x^2)^n};$$

$$p_3(u) = \frac{1}{2!\,2^3}(3 + 3\,u + u^2)\,e^{-u},$$

$$p_4(u) = \frac{1}{3!\,2^4}(15 + 15\,u + 6\,u^2\,u^3)\,e^{-u},$$

$$p_5(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(105 + 105\,u + 45\,u^2 + 10\,u^3 + u^4)\,e^{-u},$$

$$p_6(u) = \frac{1}{5!\,2^6}(945 + 945\,u + 420\,u^2 + 105\,u^3 + 15\,u^4 + u^5)\,e^{-u},$$

$$p_7(u) = \frac{1}{6!\,2^7}(10395 + 10395\,u + 4725\,u^2 + 1260\,u^3 + 210\,u^4 + 21\,u^5 + \\ + u^6)\,e^{-u},$$

$$p_8(u) = \frac{1}{7!\,2^8}(145135 + 145135\,u + 72765\,u^2 + 17325\,u^3 + 3150\,u^4 + \\ + 368\,u^5 + 28\,u^6 + u^7)\,e^{-u},$$

$$q_4(u) = \frac{1}{3!\,2^4}(3\,u + 3\,u^2 + u^3)\,e^{-u},$$

$$q_5(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(15\,u + 15\,u^2 + 6\,u^3 + u^4)\,e^{-u},$$

$$q_6(u) = \frac{1}{5!\,2^6}(105\,u + 105\,u^2 + 45\,u^3 + 10\,u^4 + u^5)\,e^{-u},$$

$$q_7(u) = \frac{1}{6!\,2^7}(945\,u + 945\,u^2 + 420\,u^3 + 105\,u^4 + 15\,u^5 + u^6)\,e^{-u},$$

$$q_8(u) = \frac{1}{7!\,2^8}(10395\,u + 10395\,u^2 + 4725\,u^3 + 1260\,u^4 + 210\,u^5 + 21\,u^6 + \\ + u^7)\,e^{-u},$$

$$q_9(u) = \frac{1}{8!\,2^9}(145135\,u + 145135\,u^2 + 72765\,u^3 + 17325\,u^4 + 3150\,u^5 + \\ + 368\,u^6 + 28\,u^7 + u^8)\,e^{-u},$$

$$-p''_3(u) = \frac{1}{16}(1 + u - u^2)\,e^{-u},$$

$$-p''_4(u) = \frac{1}{96}(3 + 3\,u - u^3)\,e^{-u},$$

$$-p''_5(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(15 + 15\,u + 3\,u^2 - 2\,u^3 - u^4)\,e^{-u},$$

$$-q''_3(u) = \frac{1}{16}(3u - u^2)e^{-u},$$

$$-q''_4(u) = \frac{1}{96}(3u + 3u^2 - u^4)e^{-u},$$

$$-q''_5(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(9u + 9u^2 + 2u^3 - u^4)e^{-u},$$

$$p_4^{(4)}(u) = \frac{1}{96}(3 + 3u - 6u^2 + u^3)^{-u}$$

$$p_5^{(4)}(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(9 + 9u - 3u^2 - 6u^3 + u^4)e^{-u},$$

$$p_6^{(4)}(u) = \frac{1}{4!\,2^5}(15u + 15u^2 - 10u^3 + u^4)e^{-u}.$$

Frequency law for single variable $f_i(x_i)$	Interval	Frequency law for the sum of n variables $p_n(u)$	Frequency law for the mean of n variables $p_M(u)$
$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{h}{\sqrt{\pi n}} e^{-h^2 u^2/n}$	$\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-n h^2 u^2}$
$\frac{2h}{\pi(1+h^2 x^2)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{h^n \pi} \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} \frac{\Gamma(r) \cos(r \tan^{-1} h u/n)}{h^{-n-1}(n^2+h^2u^2)^{r/2}}$	Replace h by $n h$.
$\frac{2h}{\pi} \cdot \frac{1}{e^{hx}+e^{-hx}}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{2^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\, dt}{(e^{\pi t/2h} + e^{-\pi t/2h})^n}$	$\frac{2^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\, dt}{(e^{\pi t/2nh} + e^{-\pi t/2nh})^n}$
$\frac{h e^{-h^2(x^2-2ax)}}{\pi e^{h^2 a^2}}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{h}{\sqrt{n\pi}} e^{-h^2(u-an)^2/n}$	$\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n(u-an)^2}$
$\left(\frac{h}{4} + \frac{h^2}{4}\|x\|\right) e^{-h\|x\|}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{h^{4n}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\, dt}{(h^2+t^2)^{2n}}$	$\frac{(nh)^{4n}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(ut)\, dt}{(n^2h^2+t^2)^{2n}}$
$\frac{h}{2} e^{-h\|x\|}$	$(-\infty, \infty)$	$h e^{-h\|u\|} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n^{(-r)} h \|u\|^{n-1-r}}{2^r (n-1-r)!\,(r)!}$	Replace h by $n h$.
$\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} x^2$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\pi 2^n h^2 n} \int_0^\infty e^{-t^2 n/4h^2} (2h^2 - t^2)^n \cos(ut)\, dt$	Replace h by $n h$.

Frequency law for single variable $f_i(x_i)$	Interval	Frequency law for the sum of n variables $p_n(u)$	Frequency law for the mean of n variables $p_M(u)$
$\frac{\Gamma(2k+2)(1-x^2)^k}{2^{2k+1}(k+1)^2}$, $k=1$, $\frac{3}{4}(1-x^2)$	$(-1, 1)$	$\frac{3^n}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\sin t - t\cos t}{t^3}\right\}^n \cos(ut)\,dt$	
$\frac{h^r}{\Gamma(r)} e^{-hx_i} x_i^{r-1}$, $r > -1$	$(0, \infty)$	$\frac{h^{nr}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(ut - nrk)\,dt}{(h^2+t^2)^{nr/2}}$	Replace h by nh.
$1/2h$	$(-h, h)$	$\frac{1}{\pi h^n}\int_0^\infty \frac{(\sin ht)^n \cos(ut)\,dt}{t^n}$	Replace h by nh.
Tipe 3. $k(1+x/a)^{ga} e^{-gx}$	$(-a, \infty)$	$\frac{a^{-nag}}{\pi} k^n e^{nag}\{\Gamma(ga+1)\}^n \int_0^\infty \frac{\cos\{(u+na)t - n(ga+1)\,\mathrm{arc\,tan}\; t/g\}\,dt}{(t^2+g^2)^{n(ga+1)/2}}$	
$\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{1+h^2x^2}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{nh}{\pi(u^2h^2+n^2)}$	$\frac{h}{\pi}\cdot\frac{1}{1+h^2u^2}$, same for any n.
$\frac{2h}{\pi}\cdot\frac{x^2}{(h^2+x^2)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}\binom{n}{r-1}\frac{\Gamma(r)\cos(r\cdot \mathrm{arc\,tan}\; u/nh)}{((nh)^2+u^2)^{r/2}}$	
$\frac{\sqrt{h}\,e^{-hx}}{\sqrt{\pi\cdot x}}$	$(0, \infty)$	$\frac{h^{n/2}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos(ut-nt)\,dt}{(h^2+t^2)^{n/4}}$, $\tan 2k = t/h$	Replace h by nh.

H. SONNABEND

Note preliminari di demografia africana

SCOPI E METODI.

La demografia è una scienza giovanissima, la demografia delle razze primitive esiste solo allo stato embrionale.

Nei libri di viaggi, siano essi scientifici, pseudo scientifici o più confessatamente di lettura amena, si trovano qua e là dei dati sull'ammontare approssimativo o sul movimento di qualche popolazione primitiva. Nelle opere del genere menzionato e in qualche buon trattato d'etnografia si possono trovare talvolta eccellenti descrizioni di usi e costumi d'evidente interesse demografico.

Non esistono invece, per quanto io sappia, opere dedicate particolarmente allo studio della demografia dei primitivi nel suo aspetto integrale.

Tale lacuna è da considerarsi assai deplorevole, quando si ricordi nella reale o apparente immobilità delle popolazioni più vicine allo che stato naturale il fatto demografico è l'elemento più evidentemente dinamico. Difatti è in quest'ultimo da cercarsi la spiegazione del contrasto tra la cristallizzazione economico-sociale propria della tribù primitiva e l'instabilità della sua posizione di fronte alle tribù vicine.

Lo studioso dell'Africa è colpito dai continui spostamenti che si verificarono per secoli e si verificano ancora nella compagine delle popolazioni di questo continente, immobili solo per l'osservatore lontano. La ragione di questi cambiamenti deve cercarsi in un fattore di variabilità permanente e tale da creare facilmente uno squilibrio di potenza tra tribù e tribù. Nelle società umane dal tipo economico-sociale prevalentemente statico un fattore del genere suddetto può dirsi solo l'estrema instabilità dell'equilibrio demografico.

Ogni cambiamento nell'assetto numerico è per la tribù africana — organismo normalmente ben piccolo — un fatto d'importanza primaria nella dura lotta per l'esistenza. Le classi d'età si succedono come le onde nel mare, una modesta alterazione di qualche costume (per es. durata del periodo d'allattamento) può causare l'ingrossamento di una di queste onde e il conseguente allagamento del territorio dei vicini. Un'altra volta un fattore negativo (epidemia, indebolimento dell'istinto famigliare) può causare un perturbamento dell'equilibrio demografico ; la tribù declina rapidamente e viene « mangiata » o incorporata dal nemico, sempre pronto ad approfittarne. Anche qui la lotta per l'esistenza è condotta senza scrupoli o pietà.

La demografia, intesa nel senso del GINI, cioè non come una semplice descrizione di fatti numerici, ma come *un'analisi* possibilmente completa di tutti gli elementi, atti ad influenzare, direttamente o indirettamente, l'assetto numerico d'una popolazione, potrà dunque forse gettare nuova luce sul problema dei continui spostamenti etnici propri di questo continente.

Le note che seguono contengono i primi risultati di uno studio che, da oltre un anno, sto eseguendo nella vasta regione tra il Limpopo e lo Zambesi.

Le tribù studiate appartengono, principalmente, al ramo meridionale dei Bantù (1) e formano due gruppi ben distinti.

Al primo gruppo appartengono le popolazioni che parlano diversi dialetti della famiglia linguistica, nota col nome generico di Shona. Le tribù principali sono: Makorekore, Wazezuru, Makaranga, Manyika, Varozwi, etc. (2). Il nerbo di queste popolazioni è composto di discendenti dai Bantù immigrati dal Nord qualche secolo fa.

Il secondo gruppo è invece giunto dal Sud e la sua presenza in queste regioni è di data relativamente recente (circa un secolo). Ad esso appartengono gli Amandabele, Amaswazi, Amatshangana, nonchè parte dei Basuto, dei Bavenda ed altri meno importanti.

---

(1) Il nome è applicato a tutte le tribù che parlano diversi dialetti, del resto ben differenziati, della famiglia linguistica omonima, diffusa su circa 2/3 del continente africano.

(2) L'unificazione della ortografia di queste lingue non è ancora definita, quest'ultima varia perciò da autore a autore. Come è noto il Bantù forma le parole attraverso cambiamenti nei prefissi. Non posso entrare qui in particolari, voglio solo avvertire il lettore di non meravigliarsi, se per es. troverà nel testo Makaranga per indicare il popolo di questo nome, « Wukaranga » per indicare il singolo individuo e « sikaranga » la lingua della stessa tribù. Dire un Makaranga non è meno sbagliato di un « inglesi ».

La ricerca, condotta con un metodo molto semplice, consiste, in sostanza, in un tentativo di raccogliere informazioni sulle condizioni generali, sui costumi ed usi d'interesse demografico e in una serie di rilevazioni numeriche.

I dati numerici sono stati ottenuti, servendosi sempre di uno specchietto tipo, nel corso di diversi viaggi nell'interno. Per ragioni ovvie la preferenza fu data a località lontane dai centri d'abitazione europea, e, per quanto possibile, situate a distanza notevole dalle stazioni missionarie.

Nelle colonie si sente spesso affermare che il Bantù è per natura incline alla menzogna. Il pericolo che all'investigatore deriva da tale fatto diminuisce notevolmente, quando se ne è ben capita la ragione.

La cortesia verso l'interlocutore è per il Bantù molto più importante dell'amore per la verità. Se è possibile conciliare ambidue tanto meglio, se invece è necessario scegliere, la preferenza viene senz'altro data «alle buone maniere». L'indigeno si sforza perciò d'intuire la risposta più gradita a chi l'interroga, e deve essere cura di quest'ultimo di non suggerire alcuna preferenza di sorta.

Ma anche per l'investigatore più abile è poco utile interrogare indigeni, occupati nei centri d'abitazione europea, sulla composizione delle loro famiglie che, normalmente, vivono lontano nei kraals. Si otterrebbe troppo facilmente una serie di menzogne, frutto più o meno ingegnoso della grottesca immaginazione africana e del menzionato senso di supercortesia malintesa.

Un certo controllo si può aver solo nei villaggi indigeni, dove *de visu* si fa la conoscenza di tutta la famiglia, non raramente composta da tre generazioni al completo. Un'altra garanzia è offerta dalla presenza della guida indigena, scelta nella regione da studiarsi e perciò informata sul vicinato.

Le informazioni sugli usi, costumi etc. attinenti al problema sono state ottenute in una lunga serie di «interviste» con vecchi indigeni, capi-famiglia, capi-tribù, stregoni e comunque gente competente. Molte notizie mi furono fornite da missionari, spesso da molti anni a contatto con la popolazione indigena, e da funzionari governativi addetti all'amministrazione locale (1).

---

(1) Di grande utilità ho trovato il questionario demografico, pubblicato a cura del Comitato Italiano per lo Studio dei Problemi della Popolazione e compilato da una commissione di competenti in materia.

Il Bantù non parla volentieri dei costumi della sua tribù. Sotto l'interesse del bianco a sapere cose che gli dovrebbero essere tanto indifferenti, l'indigeno sospetta qualche rete. È perciò inutile armarsi di un questionario e bombardare l'individuo con una serie di domande. Il Bantù, noto per la sua loquacità innata, diventerà taciturno, professerà totale ignoranza o fingerà di non capire.

Parlo, per un quarto d'ora, con un vecchio, eloquente Vukaranga sulle cose più indifferenti e finalmente rischio una domanda sulla esistenza o meno di un certo costume. La pronta risposta, data con l'aria più innocente e non priva del garbo d'una quasi infantile ingenuità frammista alla scaltrezza troppo trasparente, fu letteralmente « Sono troppo vecchio, i miei orecchi non sentono niente e sono anche stupido ».

Invece dell'inadeguato metodo della interrogazione è necessario applicare quello della vera e propria conversazione. Il *questionario memorizzato* serve per suggerire il tema appropriato e una certa conoscenza generale dei costumi aiuta a conquistare l'interessamento e la confidenza dell'interlocutore.

È importante mostrarsi informato sui costumi di qualche tribù vicina. Ciò agisce come una specie di provocazione, l'individuo diventa ansioso di mostrare le proprie cognizioni in materia e la superiorità della sua gente.

Tanto i dati numerici quanto quelli di natura descrittiva si riferiscono alle tribù abitanti nella regione sopra delimitata.

In quanto alla possibilità di trarre da essi conclusioni di carattere più generale, ricordo ciò che spesso fu rilevato a proposito dei costumi ed usi di popolazioni primitive, e precisamente esser la loro variabilità di forma basata su una sostanziale uniformità di contenuto e significato.

Gli elementi metafisici nel desiderio di prole.

Essere continuato attraverso la figliolanza non è per il Bantù una metafora o un sentimento vago, ma una certezza non meno reale della vita stessa. Quando il Mushona è assiso nella sua capanna, per prendere il nome del padre deceduto, i presenti esclamano festosamente e con profonda convinzione: « Il nostro uomo è tornato ». Non si tratta però di una cosciente fede nella reincarnazione, ma di un istinto di conservazione tradotto in termini d'immortalità.

Chi muore dopo aver raggiunto la pubertà o, come altri filosofi indigeni affermano, dopo aver contratto matrimonio lascia uno spirito detto « mudzimu » dai Mashona e « idhlozi » dagli Amandabele. Questo essere emanato dal defunto ha bisogni terrestri e la loro soddisfazione è di spettanza dei discendenti.

Lo spirito dell'antenato, di quando in quando, deve esser propiziato con un po' di birra, di carne o magari di tabacco. Trascurare il « mudzimu » è un peccato che porta gravi sanzioni.

L'uomo che lascia figliolanza sa chi prenderà cura del suo spirito d'oltretomba e non ha grande paura della morte. Non così lo scapolo. « Chi farà pira (sacrificherà) a me, se non ho figli ? » domanda un previdente giovanotto di una ventina di anni, pensando alla inevitabile sorte d'ogni mortale.

La religione dei Bantù è spesso chiamata animismo, ma, almeno per le tribù da me avvicinate, questo termine sembra poco giustificato. È difficile, anzi forse impossibile, rintracciare nella concezione di questi indigeni l'idea di una pluralità di anime che abitano la materia in tutte le sue manifestazioni.

Più giustificato è parlare di *dinamismo magico*. Tutti i Bantù dell'area studiata credono difatti all'esistenza di una infinità di forze occulte che possono aver sede in tutte le cose del mondo organico ed inorganico e si rivelano all'uomo nelle forme e nelle circostanze più svariate.

Però questo dinamismo magico non è la religione del Bantù, esso è piuttosto la sua visione del mondo nel senso del tedesco « Weltanschauung ». La credenza diventa religione solo se ad essa si aggiunge l'elemento del culto.

Riti e pratiche sono invece osservati dal Bantù per onorare e propiziare gli spiriti degli antenati. Solo l'adorazione di questi spiriti contiene dunque i veri e propri elementi di una religione.

Il valore etico di questa specie di « ancestrolatria » è, senza dubbio, molto inferiore a quello del *taoismo cinese*, ma ambidue hanno vaste conseguenze d'ordine demografico, data la loro esaltazione della figliolanza.

Presso qualche tribù studiata si possono trovare traccie di una concezione religiosa più elevata. Sono esse anzi che hanno dato luogo alla tesi che l'attuale paganesimo crudo dei Bantù sia effetto di decadenza da uno stadio precedente, caratterizzato da qualche forma di monoteismo primitivo.

Il Mushona crede per es. nell'esistenza di un Essere eterno che regola il corso del mondo e che egli chiama Mwari. Questo Dio è però collocato così in alto da non prendersi alcuna cura dei bisogni dell'individuo, dominio esclusivo dei già menzionati « midsimu ». A Mwari bisogna rivolgersi solo in caso di grandi calamità collettive, quando cioè non il benessere del singolo, ma l'esistenza stessa del gruppo è in pericolo.

Però in realtà anche questo dio è una specie di grande mudzimu della tribù quale insieme. La mente del Bantù non concepisce l'idea del creare dal niente, a base anche di questa sua concezione religiosa sta il concetto del generare. Difatti la traduzione della parola Mwari è vicina al nostro concetto di *Generatore*, ma non già a quello di *Creatore*. È significativo in tale connessione che, per i Sena dello Zambesi, « Mwali » ha il doppio significato di dio e di femmina entrata nell'età di procreazione.

Lo stesso ordine di idee si ritrova a proposito del « Umkulunkulu » (Grande-Grande) degli Amandabele. In questa parola si voleva vedere il nostro concetto di Dio. In realtà si trattava di un malinteso.

Se si interroga un indigeno locale su suoi antenati, egli giunto all'ultima generazione, della quale ha memoria, risponde Umkulunkkulu. È ovvio che si vuole indicare con ciò il progenitore di tutti, questo Grande-Grande avrebbe un signicato simile al corrispondente aggettivo nella parola inglese « grand-grand-father ».

Umkulunkulu è in realtà niente altro che lo spirito (idhlozi) del primo generatore, una specie d'emanazione immortale dell'Adamo degli Amanadabele.

Il culto degli spiriti degli antenati che si traduce in un ardente desiderio di prole trova conferma dunque anche nella analisi dei più astratti concetti del Bantù.

Nelle conversazioni avute cogli indigeni, a proposito dei vantaggi o meno di figliolanza numerosa, ritornava spesso — prima a mia grande sorpresa — un altro argomento d'ordine elevato, e precisamente quasi sempre il mio interlocutore faceva rilevare la necessità di avere numerosa prole per rendere forte e grande la propria tribù.

Il tono di queste dichiarazioni di « patriottismo demografico » variava da regione a regione, il loro significato intimo rimaneva però sempre eguale. Il bellicoso Ndebele soleva insistere sulla importanza militare, il mite Muvenda vestiva i suoi sentimenti in una forma meno violenta, e era un vecchio Wukaranga che forse ne trovò la espressione più poetica.

« Tu sei seduto » egli disse « sotto un albero dai molti rami, perchè ti piace la loro ombra. Bella è la vita all'ombra di una famiglia che ha molti rami e ramicelli. È più gradevole il riposo in una foresta che sotto un albero solitario, così è più bella la vita in una tribù che conta molti alberi bene ramificati ».

L'unica forza atta a indurre il Bantù alla cosciente limitazione dell'incremento demografico è il terrore d'essere accusato di stregoneria. Come è, normalmente, pericoloso diventare troppo ricchi, così bisogna guardarsi d'apparire troppo fortunati nella benedizione di figliolanza numerosa. Tutto ciò che esce dall'ordinario sia nel bene che nel male, è attribuito alle forze occulte ; la fortuna fa sempre nascere il sospetto di un patto cogli spiriti maligni.

Si capirà così come un vecchio indigeno, dopo aver esaltato le benedizioni di numerosa prole, tentò di convincermi che la donna *non deve* aver più di sette figli viventi. Se un uomo ha più mogli e una di esse ha più di sette figli, non vi è dubbio che essa ha un accordo segreto con le forze maligne. Se invece un uomo ha solo una moglie e più di sette figli viventi, egli stesso deve essere uno stregone.

Alla luce di questa spiegazione ho potuto cogliere il senso del seguente proverbio sikaranga, apparsomi prima assai misterioso: « Se vai al kraal di questo uomo, guarda bene come cammini, perchè vi sono troppe formiche » (Kana uchifamba pamusha wangana fambo wakachenjera nokuti pano vuzengeza).

Nello stesso ordine di idee è il complimento che il Ndebele usa fare, incontrando un uomo benedetto da numerosa figliolanza. « Gli stregoni non desiderano incremento » (umkwanda kwa liwa nga bataki) egli dice, e con questo vuole significare all'interlocutore che non vi possono essere nel suo kraal degli stregoni, altrimenti non sarebbe mai riuscito ad allevare tanti figli. Tale constatazione deve fare piacere ad ogni Ndebele che si rispetta, e difatti il citato proverbio è sempre un complimento assai gradito.

Come abbiamo visto, l'ardente desiderio del Bantù d'essere continuato, attraverso la figliolanza, ha le sue profonde radici in una sua particolare concezione religiosa. La donna che non procrea deve perciò apparire, ai suoi occhi, bollata dalla maledizione di qualche spirito offeso e nemico, e come tale una creatura da evitarsi più che da compassionarsi.

Per la Bantù la procreazione è divenuta così il vero attributo della femminilità, il coronamento della vita. La disgrazia più terribile che essa possa immaginare è di rimanere « inyumbakazi » (sterile).

Significato demografico delle diverse forme di matrimonio.

Il desiderio di prole è, come già abbiamo rilevato, la migliore chiave per la comprensione del modo di vivere del Bantù. Quasi tutti i costumi ed usi in qualche modo connessi colla vita matrimoniale, famigliare o comunque sessuale sono ispirati al concetto che chiamerei del *maggiore rendimento demografico*. In altre parole, la ragione di essere di molti elementi etnografici del genere menzionato deve cercarsi nella credenza che essi, direttamente o indirettamente, contribuiscono all'incremento della tribù.

Molti fatti che sembrano essere in contrasto con la regola suddetta non appaiono più tali, se sottoposti ad un esame più attento. Altri invece sono frutto della ignoranza dell'indigeno in materia di fisiologia, igiene etc. o conseguenza diretta della sua mentalità prelogica.

Comincierò l'analisi che servirà a chiarire questo punto di vista dall'elemento più importante, cioè dalla istituzione stessa del matrimonio.

Le forme matrimoniali variano da tribù a tribù, quelle più frequentemente osservate presso le popolazioni studiate sono: ukulobola, rimambuyia, wugariri, gariozela.

L'ukolobola è, senza dubbio, il costume più largamente diffuso. L'acquisto della moglie avviene attraverso il pagamento al padre di lei d'una dote, chiamata lobola e consistente normalmente in un certo numero di capi di bestiame. Solo in qualche regione infestata dalla mosca tse-tse il pagamento viene fatto, servendosi di zappe ed altri oggetti di valore.

Il costume suddetto può facilmente essere interpretato come un semplice contratto di compra-vendita. Non mancavano perciò, e non mancano anche adesso, voci d'indignazione contro questo presunto modo d'abbassare la donna al livello d'un oggetto da comprarsi.

Un breve esame di questa forma matrimoniale basterà per convincersi che la lobola non è semplicemente il prezzo da pagarsi per una donna, ma ha per il Bantù un significato ben più complesso.

L'assetto numerico è per il gruppo famigliare, entro una popolazione primitiva, un fattore di primaria importanza nella dura lotta per l'esistenza. Per garantirsi contro la sopraffazione e l'eventuale annientamento, esso deve necessariamente tendere a mantenere e magari ad accrescere la propria forza numerica. Da tale punto di vista, l'ideale per questo gruppo sarebbe d'assicurare a se stesso la potenzialità riproduttiva di tutte le sue componenti femminili.

Tale soluzione è resa impossibile, nel sistema patriarcale, dalla profonda avversione (Ved. pag. 34) contro l'incesto, inteso dall'uomo primitivo in un senso alquanto vasto. La necessità di *riconciliare il principio della esogamia con l'assicurazione del gruppo contro la possibile perdita di potenzialità riproduttiva* condusse alla introduzione del semplice, ma ingegnoso sistema della ukulobola.

Il gruppo che cede una donna deve essere garantito di ottenere in cambio un'altra madre in potenza. Il padre, che riceve lobola per la sua figlia assume automaticamente l'obbligo d'acquistare una moglie per uno dei suoi figli. Non si tratta dunque di un semplice prezzo, perchè al momento utile, il bestiame dovrà essere trasferito ad un altro gruppo famigliare per ottenere una donna, cioè per compensare la perdita prima subita.

Il fatto che la lobola non viene pagata per la donna, ma per la cessione dei suoi futuri figli risulta chiaro, quando si ricorda che il marito può chiedere la restituzione del bestiame, se la donna rimane sterile (Ved. pag. 14). Anzi, è frequente il costume di posporre il pagamento di una certa parte del prezzo fino alla nascita del primo bambino.

Il carattere della lobola come garanzia della conservazione del gruppo famigliare ha, certamente, contribuito a dare al bestiame quella alta posizione che esso occupa nel sistema religioso delle tribù studiate. Esso diventa, in un certo senso, parte integrale del gruppo (1). Alla luce di questo principio diversi costumi dei Bantù perdono gran parte della loro apparente illogicità. A titolo d'illlustrazione ne citeremo i più caratteristici.

Un padre può acquistare una o più mogli per conto di un figlio prematuramente deceduto, usando come lobola il bestiame già destinato a tale scopo. La donna è autorizzata, anzi incoraggiata ad avere amanti ed i bambini che ne risultano sono considerati, a tutti gli effetti, figli del defunto. La paternità materiale non conta, i figli sono

---

(1) Il carattere sacro del bestiame è illustrato da una serie di costumi, dei quali citiamo qui alcuni. Le donne sono ammesse nel « kraal » del bestiame solo a certe condizioni ed in particolari circostanze. Nel periodo di mestruazione esse non devono attraversare i sentieri del bestiame, altrimenti questo sarà affetto da gravi malattie. Presso gli Amandabele, persone afflitte da qualche impurità rituale devono astenersi dal bere latte. Infine presso alcuni gruppi, ho incontrato il costume di seppellire i personaggi più importanti entro il recinto del bestiame.

dell'uomo, al quale apparteneva il bestiame, usato per « lobolare » la madre.

Il principio che considera il bestiame garanzia di discendenza è condotto ai suoi estremi più che stupefacenti anche nel caso seguente.

La vedova di un uomo che non ha lasciato discendenti maschi, volendo evitare la sorte di diventar quarta o quinta moglie del cognato (erede legittimo), dichiara di voler essa dare un figlio al marito deceduto. Se essa, entro un certo tempo, dovesse restare incinta, il nascituro, se maschio, sarà considerato figlio ed erede del defunto.

Presso i Basuto la vedova, posta nella stessa situazione potrà scegliere un'altra via non meno originale e, certamente, più sicura. Ella annuncia pubblicamente l'acquisto di due o tre mogli per conto del marito deceduto, usando, naturalmente, a tale scopo il bestiame da lui lasciato. I figli di queste spose del defunto saranno a tutti gli effetti eredi legittimi del loro padre teorico.

Il costume suddetto va diffondendosi dai Basuto alle tribù con esse a contatto.

Il principio della lobola conduce, del resto, a conseguenze ancora più grottesche : *non solo un defunto può sposare, ma anche una donna può prendere moglie.*

Presso i Bavenda, tribù che vive ai confini meridionali della Rhodesia, vi sono donne abbienti, particolarmente nella classe aristocratica, che sono in possesso di una o più mogli, sposate per via ordinaria, cioè attraverso il pagamento della lobola. Le spose lavorano per questo « marito » di sesso femminile, sono incoraggiate ad avere amanti ed i loro bambini sono considerati figli di colei che ha pagato per esse. Si ha così il caso originale di una donna che diventa padre.

Nelle condizioni delle tribù studiate l'ukulobola è — a parte questi casi estremi — la migliore soluzione anche dal punto di vista demografico.

Esso anzitutto, già in forza del proprio principio, *sottolinea la procreazione quale primo scopo dell'istituto matrimoniale.* Esso impone poi al padre o a chi fa le sue veci il dovere assoluto di procurare una moglie al figlio o al giovane sotto tutela.

Non solo è quasi inesistente il tipo della vecchia zitella, ma anche assai raro quello del vecchio scapolo. Anche la povertà difficilmente potrà essere impedimento serio all'ammogliarsi, perchè, o il padre ha una figlia, per la quale si otterrà la necessaria lobola, o qualche parente provvederà all'uopo. Vedremo presto che per i casi estremi vi sono altre possibilità.

L'ukulobola assicura l'esogamia senza ricorrere al ratto, suo presupposto primario. Anzi, un matrimonio del genere descritto crea relazioni permanenti tra le due famiglie, anche perchè la lobola viene spesso pagata a lunghe rate.

Il sistema in parola anzichè essere degradante per la donna, le conferisce una posizione di grande importanza nella casa paterna e le offre l'unica reale garanzia contro il maltrattamento da parte del marito. La moglie, sottoposta a sevizie o comunque a gravi oltraggi, ritornerà ai propri genitori e il marito perde il diritto di chiedere la restituzione della lobola.

Il sistema descritto si presta, naturalmente, a diversi abusi. La donna è per il Bantù, in certo senso, l'unica forma di capitale atto a portare interessi ; non possono mancare coloro che sanno sfruttare questo capitale su scala più o meno vasta.

Furono notati molti casi di capi-tribù o comunque gente abbiente che, col bestiame di loro proprietà, acquistavano mogli per un numero di giovani poveri. Giusto il principio esposto, la prole derivante da questi matrimoni appartiene di diritto a chi provvede la lobola. Le femmine vengono cedute a prezzo più o meno alto, mentre — trattandosi di gente potente — diversi espedienti vengono escogitati per eludere il dovere di provvedere mogli per i figli maschi.

Per tale via il capitale investito porta interessi altissimi. Di Mohlomi, capo dei Basuto, si dice che procurò mogli ad un migliaio di suoi sudditi — solo il suo « ragioniere » forse ne sapeva il numero esatto — e si assicurò così un'entrata molto considerevole.

Abusi del genere descritto costituiscono una eccezione e tendono a scomparire rapidamente, ciò, sia per la decadenza del potere dei capi-tribù, sia per la facilità colla quale anche il giovane più povero può procurarsi il necessario bestiame, lavorando per un padrone bianco. Nei centri d'abitazione europea si trovano indigeni, venuti spesso anche dalle regioni più remote, a lavorare « per guadagnarsi una moglie ».

Però, anche in questo campo, le leggi economiche trovano piena applicazione ; la maggiore facilità d'ottenere i mezzi di pagamento ha condotto ad un rialzo notevole del prezzo delle donne (1). Dal tempo

---

(1) Il prezzo varia, naturalmente, da regione a regione e dipende anche dalle « qualità », e anzitutto dalla origine della donna prescelta. Ho raccolto diversi dati in proposito, per ora la media appare da 8 a 10 capi di bestiame e da 5 a 8 sterline.

della occupazione bianca, la ricchezza principale di questi indigeni, cioè il bestiame, aumenta continuamente, mentre poco a poco anche il danaro entra come mezzo di scambio. Le lagnanze amare sull'aumento della lobola, sentite da me spesso dai giovani dei kraal, sono dunque più che altro frutto della loro ignoranza . . . in materia di economia politica.

Tra le forme di matrimonio che rendono possibile trovare moglie anche per il giovane più povero, la più diffusa è quella detta « kugarira » o anche « wugariri ».

Secondo questo costume, il candidato lavora per il futuro suocero, per un certo numero di anni, e riceve da lui poi la figlia in isposa. Ma anche dopo egli rimane colla famiglia della moglie e non ha la *patria potestas* sui figli. Questi appartengono al loro nonno materno, perchè egli non ha ricevuto lobola. L'emancipazione del « mugariri » (lett. colui che aspetta) si potrà avere solo, se una delle sue figlie è stata maritata e il prezzo corrispondente trasferito al suocero.

Questo costume che ricorda la storia biblica di Giacobbe e Rachele è, certamente, sorto in qualche regione, dove non era possibile tenere bestiame. Attualmente esso esiste come forma sussidiaria presso molte delle tribù studiate ; presso i Makorekore, la « kugarira » è anzi divenuta il costume prevalente. La forma del costume in parola varia da regione a regione, ma in sostanza esso rende assai rari i casi di celibato in seguito a povertà.

Lo stesso scopo è raggiunto anche dal costume della rima mbuya, praticata dai locali Wamanyika. La letterale traduzione del nome suddetto è « coltivare una suocera » e difatti esso caratterizza bene il significato del costume. *A* acquista una moglie per *B* che non possiede il necessario bestiame ; in compenso *B* si obbliga di dare come sposa la figlia che nascerà da tal matrimonio. I due contraenti vengono chiamati « shamvari », cioè amici, mentre di *A* si dice che egli ha cominciato a « coltivarsi una suocera ». Se *B*, disgraziamente, non dovesse avere figlie, egli dovrà provvedere una moglie al primogenito del suo amico.

Mentre tutti i costumi descritti, quale che sia la loro antichità e origine, si basano sul sistema patriarcale, in una delle tribù, con cui sono venuto a contatto, si trova una forma matrimoniale con evidenti traccie di matriarcato. Alludo alla così detta « gariozela » dei Bashankwe.

Secondo tale costume, il fidanzato lavora per la futura suocera, e precisamente qualche mese all'anno per alcuni anni successivi ; prima delle nozze egli dá a lei anche qualche regalo sostanziale. Però anche dopo le nozze la moglie rimane con la famiglia della suocera, e in certo senso, sotto l'autorità di questa.

La già citata tendenza di vedere nella procreazione lo scopo principale del matrimonio ha per naturale conseguenza il desiderio di convincersi già prima delle nozze se la donna prescelta non è sterile. L'indigeno vuole giustificare con questo desiderio molti costumi troppo ripugnanti per la descrizione e per lo più basati sulla sua totale ignoranza dei processi fisiologici.

La difficoltà di giudicare se, anche dal punto di vista dell'indigeno, si tratta di una giustificazione vera e propria o solo d'un pretesto, è illustrata dal costume « umholo we mwisana », praticato da una parte degli Amakalanga di lingua sindebele. Secondo tale costume il padre che cerca moglie per un figlio porta al suo kraal la ragazza prescelta e la tiene finchè essa ha avuto da lui un bambino. Solo allora essa viene trasferita al fidanzato come sua sposa. In sostanza una specie d'edizione africana del *jus primae noctis* con una giustificazione più originale.

Non posso citare qui tutte le varianti delle forme di matrimonio descritte ; a me basta d'aver rilevato che esse, pur partendo sempre dal concetto della compensazione, dànno a ciascun uomo la possibilità di formarsi una famiglia. Il principio stesso che il gruppo famigliare deve essere compensato, evidente specialmente dalla forma matrimoniale della ukulobola, è conseguenza diretta dell'interesse che la collettività ha nel mantenimento del suo assetto numerico. È appunto la stessa collettività che impone a chi ha ricevuto il prezzo di usarlo per provvedere il gruppo di un'altra donna capace di partorire. È proprio nella società primitiva che il carattere pubblico del matrimonio è più evidente.

Riduzione delle conseguenze demografiche della sterilità e della vedovanza.

Il principio che la procreazione è lo scopo precipuo del matrimonio trova la sua logica conseguenza nel diritto di ripudiare la moglie sterile chiedendo la restituzione del prezzo pagato. La « procedura legale » in materia è, come si vedrà subito, oltremodo brutale, ma nello stesso tempo atta a ridurre ad un minimo possibile i danni demografici della sterilità.

Può anzitutto accadere che il marito confessi esser egli stesso la parte colpevole. In tale caso si potrà aver il trasferimento temporaneo di certi suoi diritti a qualche parente.

Normalmente è richiesto il consenso della donna e l'accordo ha una certa pubblicità per evitare eventuali accuse d'adulterio. Di solito il marito darà alla moglie e all'uomo prescelto qualche oggetto suo quale pegno e prova d'acconsentimento.

Mancando tale confessione, il procedimento varia a secondo che si tratti d'un poligamo o d'un monogamo.

Nel primo caso, se le altre mogli hanno dei figli la « colpa » della donna sterile è provata. Rimane solo da ricorrere allo stregone che dovrà individuare le cause della disgrazia e cercare i rimedi.

Compito questo ben arduo, data l'infinità di cause che, secondo il ng'anga (medico), sono atte a provocare la sterilità della donna. Forse qualche tabù è stato trasgredito da uno dei coniugi, forse è stato offeso lo spirito di qualche antenato. Più probabilmente ancora la disgrazia si deve a qualche atto di stregoneria. Chi non ha nemici ? Le possibilità sono tante. Basta per es. che un adoratore respinto abbia messo sotto la corteccia d'un albero un oggetto appartenente alla donna ed essa diventerà sterile, quando la corteccia si sarà chiusa.

Il ng'anga saprà trovare mille altre cause non meno convincenti e si metterà a cercare i rimedi. Se i sacrifici, le droghe e gli amuleti non produrranno l'effetto desiderato, egli dichiarerà solennemente che non vi è cura, perchè « la donna è nata sterile come una roccia ».

Al marito non rimane che ripudiare la moglie e chiedere la restituzione della lobola. Spesso il suocero, invece di restituire la dote manda al genero un'altra sua figlia più giovane. In tale caso il bestiame già rimesso serve come lobola per questa nuova moglie, mentre per la prima il marito avrà da pagare solamente 2-3 vacche, dato che « essa non partorisce, ma solo lavora ».

La cosa si complica, quando si tratta di un monogamo. È ovvio che in tale caso sarà necessario anzitutto trovare a chi dei due coniugi si deve la sterilità della famiglia. Il primo ad essere consultato sarà, naturalmente, lo stregone ; egli adotta un procedimento strano e ben complicato (ku simikara), che non posso descrivere in queste mie note. Ammettiamo che i suoi tentativi d'individuazione siano falliti.

È allora che la donna può ricorrere al diritto della « vima » (andare a caccia). Con tale nome espressivo è chiamato il costume, notato tanto presso gli Amandabele quanto presso diverse tribù del gruppo Shona, che dà alla donna accusata di sterilità la facoltà di lasciare temporaneamente il proprio kraal in cerca di qualche uomo con cui aver contatto sessuale. Se essa resta incinta, il marito perde ógni diritto al ripudio, essendo stato egli stesso la parte colpevole. Secondo il principio già ripetutamente rilevato, egli sarà però considerato, a tutti gli effetti, padre della eventuale discendenza della sua moglie.

Alla luce di quanto fu detto, è ovvio che presso le tribù studiate le conseguenze demografiche della sterilità sono notevolmente ridotte. Contrariamente a quanto accade presso i popoli civili, l'uomo non è condannato a rimanere senza prole, perchè la moglie è sterile e viceversa — caso del punto di vista demografico più importante — la *donna non è priva della maternità per colpa del marito.*

In altre parole, le conseguenze demografiche della sterilità sono limitate, nel caso delle popolazioni studiate, esclusivamente alle persone veramente sterili e non già estese anche ai loro rispettivi coniugi.

* * *

Anche nel caso della vedovanza vale il principio che l'eventuale capacità riproduttiva della donna non deve andare perduta per il gruppo famigliare. Difatti, se la vedova non vuole diventare moglie di uno dei parenti del marito deceduto, si può chiedere la restituzione della lobola, diminuita di una parte corrispondente al numero dei figli nati dal matrimonio. Normalmente il padre della donna dovrà restituire il bestiame, trattenendo una vacca per ogni bambino.

Se il deceduto ha lasciato solo una vedova, essa diventa moglie — normalmente è richiesto il consenso della donna — di uno dei fratelli di questo. Se invece ne sono rimaste due, la madre dell'erede (figlio maggiore del defunto) diventa moglie di uno dei fratelli del marito, mentre l'erede stesso sposa la matrigna. Se vi sono più di due vedove, l'erede ne otterrà normalmente solo due, mentre le altre saranno distribuite tra i suoi zii paterni.

La distribuzione delle vedove dà luogo, naturalmente, a diverse complicazioni e a non poche inimicizie. Ciò che però mette conto di rilevare è che la preferenza viene data normalmente ai più giovani fratelli uterini del deceduto, ai quali viene, in compenso, imposto l'obbligo di provvedere gli orfani con la necessaria lobola, quando questi saranno per ammogliarsi.

Presso i Bavenda, tribù con molte traccie del periodo matriarcale, l'arbitrio nella distribuzione delle vedove spetta alla sorella maggiore del deceduto. La « grande moglie », cioè la madre dell'erede non viene aggiudicata a nessuno e rimane sotto la protezione del figlio. In questo punto i Bavenda differiscono dunque dalle altre tribù con cui sono venuti a contatto.

Non possiamo addentrarci in tutti i particolari del complesso problema, ma già da quanto fu detto risulta chiaro che *la morte del marito, non reca, normalmente, pregiudizio notevole alla probabilità della moglie di diventare madre.* Contrariamente a quanto spesso accade presso popoli civili, la vedova dei Bantù, se è ancora in età da procreare, è quasi sempre sposata da un altro uomo. In tale senso la vedovanza è presso le tribù studiate, anch'essa regolata, secondo il già rilevato principio del maggiore rendimento demografico.

La poligamia e l'esogamia.

Il problema se la poligamia sia stata preceduta dal matrimonio di gruppo o invece da uno stadio di prevalente monogamia non può formare oggetto di discussione in queste brevi note di carattere preliminare. Qui si vorrà solo rilevare le caratteristiche essenziali della famiglia poligama, nella forma attualmente incontrata presso le tribù studiate, nonchè gettare qualche luce sul significato demografico di questa.

Il grado di diffusione della poligamia o meglio, per adoperare un termine meno usato, ma più appropriato, della poliginia è illustrato dal rapporto tra il numero totale degli uomini ammogliati e quello di tutti i poligami della stessa regione. Qualche dato in proposito può essere fornito da quell'involontario, ma universale, statistico che è l'esattore delle tasse.

Secondo il sistema fiscale vigente in qualche colonia, il poligamo deve pagare una certa tassa, del resto piuttosto modesta, per ogni moglie oltre una. Senza dunque che si abbia avuto mai un censimento sotto qualsiasi forma, chi è incaricato di raccogliere la suddetta tassa deve avere un'idea approssimativa del rapporto in parola. Ciò vale specialmente per certe regioni, dove il controllo è più facile.

Anche secondo queste stime l'intensità del fenomeno in parola varia considerevolmente da distretto a distretto. Il massimo riferito è del 44 %, e precisamente 1.080 poligami su un totale di 2.450 uomini ammogliati. La media per tutte le regioni, dove la rilevazione offre una certa garanzia d'esattezza, è di circa il 21 %.

Naturalmente, anche nei distretti maggiormente controllati, l'evasione è relativamente facile e praticata su larga scala. La media del 21 % deve essere dunque notevolmente inferiore a quella reale.. Da notarsi è ancora che, nel numero dei poligami, sono inclusi tutti quelli che hanno più di una moglie, dunque anche coloro che ne hanno tre, quattro o molto più.

Dato che il rapporto dei sessi alla nascita non differisce notevolmente da quello notato per i paesi europei, questa forma di matrimonio sembrerebbe aver per correlativo un numero considerevole di scapoli. Da tutte le rilevazioni eseguite risulta però che questo non è, anzi la percentuale di uomini che non hanno formato famiglia è del tutto insignificante (1).

Si presenta così il problema di determinare quali siano *i fattori che rendono possibile la poligamia su scala talmente vasta.* L'elemento più importante in tale senso è certamente la differenza tra le età rispettive, in cui i due sessi normalmente contraggono legami famigliari.

Dalla mia inchiesta risulta che presso le tribù studiate gli uomini usano ammogliarsi all'età di 22-25 anni. Nella maggioranza dei casi, i vecchi indigeni riferivano che « nei buoni tempi antichi » l'uomo soleva sposarsi ad un'età più alta di oggi. Ciò vale specialmente per la tribù guerriera degli Amandabele, i cui grandi re Mzilikazi e Lobengula desideravano aver molti scapoli nel loro esercito. Una certa riduzione dell'età dei candidati al matrimonio deve essere dovuta anche alla maggiore facilità d'ottenere il prezzo necessario per l'acquisto della moglie (Ved. pag. 12).

L'età matrimoniale della donna deve essere invece rimasta senza cambiamento. Due o tre anni dopo che la ragazza ha cominciato « ukulile » (crescere), cioè dopo raggiunta la pubertà, essa è considerata matura per il matrimonio. A parte alcuni gruppi con costumi particolari, la donna normalmente si marita all'età di 16-18 anni.

Vediamo dunque che tra l'età, in cui l'uomo suole prendere la prima moglie, e quella in cui la ragazza normalmente va sposa vi è una differenza media di 6-7 anni. Questa differenza nell'età al matrimonio pei due sessi è appunto la *conditio sine qua non* della poligamia nella forma incontrata presso le tribù studiate. Ciò può essere spiegato nel modo seguente.

---

(1) Non posso riportare tutti i dati numerici da me raccolti, perchè, la mia rilevazione non essendo finita, essi potranno ancora subire qualche sostanziale revisione. Ciò che già adesso appare certo a me è la generale tendenza dei singoli fenomeni studiati.

Indichiamo il numero degli uomini e delle donne di ciascun gruppo d'età con $m_1, m_2, m_3 \ldots$, rispettivamente con $n_1, n_2, n_3 \ldots$ In tale caso il numero totale degli uomini fino all'età di 60 anni sarebbe $m_1 + m_2 + m_3 \ldots + m_{60}$, quello delle donne $n_1 + n_2 + n_3 \ldots + + n_{60}$. Per maggiore semplicità ammettiamo essere $m_1 = n_1$, $m_2 = = n_2$, $m_3 = n_3$ etc. per tutti i rispettivi gruppi d'età.

Fissiamo ora l'età in cui l'uomo contrae matrimonio a 25 anni e prendiamo anche per la donna il limite superiore, cioè 18 anni. Se tutti gli uomini prendono moglie, il totale dei mariti sarà $m_{25} + + m_{26} + m_{27} \ldots + m_{60}$; se tutte le donne vengono maritate il totale delle mogli sarà $n_{18} + n_{19} + n_{20} \ldots + n_{60}$.

Si avrà così un sovrappiù di $n_{18} + n_{19} + n_{20} \ldots + n_{24}$ donne da distribuirsi tra $m_{25} + m_{26} + m_{27} \ldots + m_{60}$ uomini che già hanno una moglie. In una prima approssimazione, supponendo che il numero degli uomini sia uguale in tutte le età, vi saranno

$\frac{7\,m}{35\,m}$ 100 % = 20 % di poligami.

Da rilevarsi è che m è più grande nell'età 18-25 che in quella tra 25-60, inoltre deve tenersi conto del fatto che la mortalità degli uomini è maggiore di quella delle donne, ciò fu, particolarmente, a causa «nei buoni tempi antichi» delle infinite guerre e guerriglie tra le diverse tribù. Questi fattori ed alcuni altri di minore importanza rendono possibile la poligamia anche su vasta scala e senza che si abbia una percentuale notevole di scapoli.

I pochi dati numerici che si possiedono per giudicare del valore demografico della poligamia nella forma incontrata presso i Bantù sembrano dimostrare essere la natalità concernente le mogli di monogami lievemente superiore a quella rilevata per le mogli dei poligami. Il materiale da me finora raccolto sembra condurre alla stessa conclusione, anzi la differenza è molto più accentuata.

Riporterò qui solo i dati di una delle mie rilevazioni eseguite tra i Makaranga e gli Amandabele di alcune regioni, caratterizzate da sufficiente omogeneità demografica.

Secondo tali dati, 290 donne di poligami, giunte già alla menopausa, ebbero 900 figli viventi al tempo della mia rilevazione (1),

(1) Ho raccolto, naturalmente, anche i dati sul numero dei figli morti, la loro esattezza (sia per l'impossibilità di controllo diretto, sia per l'antipatia delle madri contro domande del genere) offre molto meno garanzie. Ho perciò preferito confrontare qui solo i dati concernenti i figli vivi al tempo della mia rilevazione.

ossia *3.1* ognuna. Su 216 mogli di monogami, anche esse dopo aver oltrepassata l'età di procreazione, ho contato invece 872 figli, cioè 4.03 per ciascuna.

La stessa tendenza risulta anche da un confronto tra le mogli di monogami e poligami non ancora giunte alla menopausa. Su 92 donne di monogami ho contato 858 figli, su 158 mogli di poligami (approssimativamente della stessa età), ho trovato invece solo 386 figli, effettivamente dunque 2.93 contro 2.43 figli per ciascuna.

La ragione principale della natalità superiore delle mogli di monogami è da ricercarsi nel seguente fatto. Il marito monogamo è più incline a ridurre possibilmente il periodo dell'allattamento per potere riprendere le relazioni coniugali normali (Ved. pag. 26). Il tabù della coabitazione e del concepimento durante un certo periodo dopo la nascita di un figlio, è, naturalmente osservato con più facilità dall'uomo che ha altre mogli. Nel caso di donne di monogami le nascite si seguono dunque, normalmente, ad intervalli più brevi.

Il sopra rilevato svantaggio demografico della poligamia è in parte controbilanciato da alcuni vantaggi. Presso le tribù studiate non esiste praticamente il tipo della vecchia zitella, tutte le donne possono dunque portare il contributo della loro fecondità. Anche le vedove non giunte ancora alla menopausa contribuiscono all'incremento del gruppo, perchè vengono quasi sempre maritate da qualcuno dei parenti. Ciò sarebbe impossibile in una società monogama, dato che l'erede spesso avrebbe avuto già un'altra moglie (Ved. pag. 15).

La situazione attuale nelle regioni studiate è caratterizzata da alcuni fattori atti a mantenere, anzi a rinforzare, la poligamia, e da certe forze d'azione lenta, ma tale da minare la base stessa di questa forma matrimoniale.

La graduale, ma decisiva diminuzione del potere dei capi, riduce la sperequazione anche in quella forma di ricchezza che per il Bantù è il possesso di molte mogli. Solo pochi « principi » hanno ancora più di 20-30 spose. D'altra parte anche l'indigeno di famiglia povera, solo se abbastanza diligente, può guadagnarsi il prezzo di 2-3 mogli, lavorando per qualche bianco.

In conclusione, vi è l'evidente tendenza a diminuire la sperequazione connessa al sistema della dote da pagarsi al padre della donna prescelta, e in conseguenza vanno creandosi condizioni più favorevoli alla piccola poligamia.

L'incivilimento, del resto per ora abbastanza lento, porterà automaticamente alla graduale scomparsa di questo tipo matrimoniale, almeno nella forma attualmente prevalente. Ciò avverrà, non per l'imposizione di una legge o per la diffusione di una nuova etica famigliare, quest'ultima solo catalizzatore nel processo di trasformazione, ma quale conseguenza di cambiate condizioni economiche.

La poligamia dei Bantù è difatti non *solo una forma di matrimonio, ma anche un sistema economico.* Chi vede l'indigeno riposarsi dagli ozi sotto l'ombra amena d'un albero, mentre le sue 2-3 o più mogli si affannano, lavorando il campo sotto il bruciante sole tropicale, ha chiara l'impressione di un vero e proprio sfruttamento. Per il Bantù del kraal, l'acquisto di una moglie significa, non solo maggiore probabilità di prole numerosa, ma anche un'altra forza lavorativa.

Tutto cambia però, quando l'indigeno, attratto dalle « meraviglie » della nostra civiltà, viene a contatto col sistema economico dei bianchi. Il Bantù che comincia a lavorare egli stesso deve rivedere poco a poco le proprie idee sulla poligamia. Nei centri europei la moglie non lavora più per lui, ma anzi egli deve mantenere la famiglia col proprio salario.

Ciò vale, naturalmente, solo per quegli indigeni che gli Inglesi con termine appropriato chiamano « detribelised natives », e non già per coloro che, dopo aver guadagnato qualche sterlina (magari per acquistare un'altra moglie), ritornano alla vita beata dei kraal.

Tra le famiglie che abitano permanentemente la locale cittadina indigena ho trovato solo 8 % di poligami. A nord del Limpopo, cioè nell'area da me studiata, i Bantù, che hanno definitivamente abbandonato il villaggio nativo costituiscono, per ora, una minoranza ben insignificante.

* * *

La *scelta matrimoniale*, a parte alcune reminiscenze endogene, è basata su un principio di rigida esogamia. In linea generale, è proibito il matrimonio tra due persone aventi lo stesso totem, eccezione fatta per il caso che esse pervengano da regioni talmente distanti da escludere, o almeno rendere poco probabile, l'appartenenza al medesimo « sib ».

Il totem, detto da alcune tribù studiate « mutupo » e da altre « isibongo », include il concetto di cognome nel senso romano e implica un severo tabù dell'animale, della pianta o dell'elemento prescelto per simbolizzare il gruppo.

Rossi non deve sposare Rossi. Humba (cinghiale) non può prendere per moglie la figlia di Humba e non deve mangiare la carne di humba.

Normalmente a Humba è proibito anche sposare una persona, la cui madre ha lo stesso totem. Rossi non può sposare Bianchi, se la madre di questo è una Rossi.

Proibito, naturalmente, è anche il matrimonio tra ascendenti e discendenti e, secondo la regola summenzionata, tra cugini.

Non intendo di entrare qui nella discussione del problema della origine della esogamia e magari tentare d'aggiungere un'altra teoria alle troppe già esistenti. Dirò solo che il carattere delle sanzioni dà l'impressione che si tratti di una reazione contro qualche forma di promiscuità. In tale senso, essa si collega alla inibizione dell'incesto, il cui lato psicologico, almeno in parte, potrebbe essere spiegato colla ipotesi freudiana della « ipercompensazione » (1).

Un intelligente e acuto osservatore locale va più oltre, volendo collegare la reazione contro l'incesto con l'origine di tutto il sistema del totem. Quest'ultimo avrebbe trovato la sua prima espressione nel nome delle « pudenda sororis » che simbolizzavano la procreazione, dunque la continuità della stirpe, e contemporaneamente erano oggetto d'orrore per la reazione contro l'incesto. Nel totem, simbolo del gruppo, fu così incluso un severissimo tabù.

Difatti molte delle tribù studiate hanno per mutupo (totem) le « pudenda mulieris ». Tale significato ha il « ngonya » dei Wazezuru e la corrispondente parola dei Bandimba. I Wamhali hanno attualmente un altro totem, essi confessano però d'aver abbandonato l'antico mutupo col significato suddetto, perchè troppo ripugnante.

Presso i Mashona ogni gruppo, oltre il totem, possiede anche un « chidawo », vale a dire una formula da usarsi in certe circostanze più o meno solenni. Orbene anche questa contiene assai spesso una chiara allusione all'organo di riproduzione (2).

---

(1) I sentimenti giunti alla intensità estrema si trasformano nel loro opposto, amore in odio, attrazione in ripugnanza. Tale ipercompensazione si doveva avere anche in relazione alla libido verso le persone di stretta parentela, colle quali si era a continuo contatto.

(2) Il Sig. Ch. Bullock, funzionario addetto da molti anni, alla amministrazione delle popolazioni indigene locali ha raccolto un numero rilevante di totem e forme laudatorie d'origine sessuale. L'applicazione del metodo psicoanalitico (anche senza ricorrere ai suoi sistemi troppo radicali) o comunque propri della moderna scienza psicologica permetterebbe di scoprire idee simili anche nel totem e in formule apparentemente di carattere del tutto differente.

Non vogliamo dipartirci dalla nostra intenzione di non appesantire queste note con riflessioni o discussioni teoriche. Non sarà perciò possibile discutere qui le eventuali modalità del passaggio dai totem originari del carattere suddetto a quelle ora diffuse presso diverse tribù locali, dato che si dovrebbe in tale caso esporre la vasta simbolistica sessuale, propria di queste popolazioni.

Basta aver rilevato la possibilità di trovare punti di contatto tra i concetti del tabù, del totem e della esogamia, tutti e tre tanto saldamente radicati nella mentalità primitiva, pregna di idee attinenti al fenomeno della riproduzione.

Elementi etnografici con conseguenze demografiche.

Passiamo ora a descrivere alcuni elementi etnografici concernenti la maternità o comunque aventi effetti demografici d'ordine più o meno diretto. Cominceremo la nostra rassegna dal periodo in cui il futuro negretto è ancora solo un embrione, o, come un Ndebele direbbe, « solo un pezzo di sangue ».

La donna in istato di gravidanza è per le tribù studiate una persona degna di speciale considerazione e rispetto. Tutti, non esclusi gli uomini d'alto rango sociale, usano di salutarla, quando essa passa. Però la gestante è circondata non solo da rispetto, ma anche da un certo timore. Il suo stato è considerato particolarmente propizio alla influenza nefasta degli stregoni, degli spiriti malefici o comunque delle macchinazioni magiche di qualche nemico.

Il mistero della nascita è il campo preferito delle più strane speculazioni metafisiche. L'azione del nemico, di qualche spirito offeso o semplicemente di qualche vicino invidioso, è con preferenza diretto a colpire la speranza di figliolanza, conditio sine qua non della felicità del Bantù. Non si può perciò mai sapere se « la donna partorirà un bambino o un mostro ». Infinite cautele sono necessarie per salvaguardare il nascituro.

Prima precauzione è la dieta speciale della futura madre. Presso i Bavenda la donna gravida non deve mangiare cibi caldi, perchè questi potrebbero scottare il bambino. Negli ultimi mesi della gestazione ella deve bere solo acqua (mai birra) e mangiare pochissimo, altrimenti il nascituro potrebbe diventare troppo grosso, causando così un parto difficile e pericoloso.

Una dieta radicalmente diversa è in uso presso le tribù del gruppo

Shona. Alla gestante è proibita l'acqua, se non manipolata prima in un modo speciale, nonchè vietati tutti i cibi amari e agri.

La credenza in ciò che fu definito « simpathetic magic » diventa per la Bantù, in tale periodo di vita, una vera e propria ossessione. Se essa va per es. a portare acqua o a sbrigare qualche altra faccenda domestica, dovrà guardarsi bene dal non ritornare prima d'avere compiuto il lavoro, altrimenti anche il bambino potrà « volgere le spalle » durante il parto. Si potrebbe elencare un numero straordinario di superstizioni del genere, la cui osservanza spesso richiede sacrifici non indifferenti.

Ma non solo la gestante è sottoposta ad una quantità di inconvenienti, anche al marito sono imposte numerose proibizioni d'ogni genere.

Egli non deve uccidere un serpente, altrimenti il bambino nascerà cieco. Se per difendersi è costretto a farlo, l'arma adoperata deve subito essere consegnata alla moglie. Dopo la nascita detto arnese viene lavato con acqua e il liquido così ottenuto applicato agli occhi è l'unico mezzo atto a salvare la vista dell'infante.

Durante la gravidanza della moglie, il marito non dovrebbe partire per un lungo viaggio, perchè « il bambino non vorrà nascere al tempo dovuto, desiderando aspettare prima il ritorno del padre »

Questi e numerosi altri costumi dello stesso genere non illustrano solo il carattere eminentemente prelogico dell'uomo primitivo, ma sono anche una testimonianza eloquente del suo amore per la figliolanza che gli fa sopportare senza lagnanze una quantità di privazioni.

La già citata credenza essere la donna gravida più facilmente vittima di forze maligne di carattere magico si rivela anche nel trattamento speciale fatto al suo corpo in caso di morte. Presso molte delle tribù studiate esso viene seppellito in terra umida, possibilmente vicino a qualche fiume. L'acqua serve come mezzo di purificazione e previene così l'ulteriore attività nefasta degli spiriti maligni nella regione dove abitava la defunta. Altri tagliano il corpo della donna e rimuovono il feto, credendo che altrimenti il marito diventerebbe sterile.

Ammettiamo ora che, grazie o meglio ancora malgrado le diverse « precauzioni », si sia giunti felicemente al giorno del parto.

La gestante, detta in shona « chirema » (letteralmente la pesante), già qualche settimana prima va ad abitare in una apposita capanna nel kraal di sua madre. Ciò è praticato specialmente, se si tratta di una primipara. Durante tale periodo, il marito può comunicare con lei solo per il tramite di terze persone, normalmente l'intermediazione è fatta dalla levatrice.

I Makaranga sogliono fare un'apertura nel muro posteriore, perchè ciò facilita immensamente «la venuta» del bambino. Molte altre preparazioni sono da farsi per facilitare il parto.

Si sente spesso dire della meravigliosa facilità del parto delle donne più vicine allo stato naturale. Almeno per quanto riguarda le popolazioni da me studiate, ciò deve considerarsi piuttosto esagerato. Le donne delle tribù con cui sono venuto a contatto non solo non sembrano in questo molto più fortunate delle loro sorelle civilizzate, ma per esse al naturale pericolo si aggiunge anche quello derivante dalla ignoranza e superstizione.

Di conseguenze particolarmente nefaste è la credenza, diffusissima tra le tribù studiate, esservi un legame d'interdipendenza tra le difficoltà del parto e la presunta illegittimità del nascituro.

Il sospetto d'infedeltà coniugale nasce subito, quando il parto si prolunga un po' più del normale. L'unica salvezza è la confessione del nome dell'amante, perchè solo allora il bambino vorrà abbandonare il grembo materno.

La levatrice e le altre donne presenti, invece d'aiutare la partoriente, aspettano quella confessione, o talvolta peggio ancora tentano di strapparla a mezzo di torture. Si conoscono diversi casi in cui le gambe della donna furono legate insieme per costringerla a parlare. Non raramente l'infelice, non più capace di sopportare terribili dolori, confessa un fallo mai commesso.

Le conseguenze nefaste per la madre e il bambino della credenza in parola sono ovvie anche, quando non si ricorre a torture ma si aspetta inerti la confessione della donna.

Ancora più triste forse è la sorte della partoriente, se è stata presa la decisione di ricorrere all'intervento chirurgico. Una pratica preferita è di tagliare il feto per rimuoverlo, letteralmente, pezzo per pezzo ; per tale operazione viene chiamato talvolta anche « il medico ».

Non raramente la levatrice, ignara anche degli elementi più semplici di anatomia, dopo l'avvenuto parto tenta di rimuovere « qualche cosa » che secondo lei dovrebbe essere un resto della placenta e si accorge poi, talvolta anche troppo tardi, essersi trattato dell'utero.

Non è dunque da meravigliarsi della grande mortalità delle puerpere e della frequenza con la quale i medici bianchi diagnosticano presso le donne indigene casi di fistola vescico-vaginale e di vagina obliterata.

La morte miete abbondantemente durante la gravidanza e il parto, ma anche subito dopo un altro tributo letale viene chiesto dagli antichi costumi della tribù.

Ogni deviazione dal normale fa sospettare l'influenza di qualche forza maligna. Molti Makaranga sopprimono i bambini che hanno avuto la cattiva idea di presentarsi al mondo prima con le gambe ; un po' d'acqua bollente versata sulla testolina del neonato preserva la famiglia da un nuovo membro che potrebbe diventare pericoloso. Presso qualche altra tribù locale alla stessa sorte è condannato anche un neonato che ha fatto il suo primo bisogno corporeo mentre stava ancora tra le gambe della madre. Allo stesso terrore per tutto ciò che sembra anormale si devono molti altri casi d'infanticidio.

Le reti della selezione hanno per il Bantù maglie ben fitte e strette. La minima deformità basta per condannare il neonato alla morte sicura (umhlolo wezlima). Acqua bollente, perforazione del cervello, soffocamento, ecco i mezzi preferiti ; dove la « legge dei bianchi » è da temersi, l'infelice infante morirà d'inedia.

Questo sistema d'*eugenica* primitiva e crudele ha per conseguenza la grande rarità con la quale si incontrano presso gli indigeni individui con qualche storpiatura.

Sotto qualche spiegazione apparentemente razionale, l'indigeno interrogato spesso nasconde il suo grande terrore per tutto ciò che in qualche modo devia dall'usuale, mentre d'altra parte le ragioni assurde date oggi dall'uomo primitivo per spiegare diversi suoi costumi sono atte a far dimenticare la loro base eminentemente razionale.

A quest'ultima categoria appartengono i costumi concernenti il trattamento dei gemelli. Esso varia da regione a regione, presso una delle tribù più numerose, e precisamente i Makaranga, prevale l'uso d'uccidere ambedue i gemelli, mentre qualche altro gruppo considera necessario sopprimere solo il secondogenito.

D'una grande varietà sono anche le ragioni additate dagli indigeni interrogati in materia. Spesso essi alludono alla necessità di distinguere l'uomo dalle bestie, dato che sono queste a partorire due o più piccoli alla volta. Qualche donna rispose di poter aver solo un bambino alla volta, perchè essa ha solo una schiena ; ciò si riferisce al fatto che la madre suole lavorare coll'infante sulla schiena, il che non potrebbe fare avendone due. Diversi vecchi Makaranga mi dicevano che, se non si dovessero sopprimere i gemelli, questi finirebbero per uccidere il capo della tribù.

Quest'ultima versione ha un interessante punto di contatto con la seguente leggenda d'incerta provenienza.

I primi gemelli sono nati in una famiglia molto povera. Il capo tribù, avuto notizia di tale cosa straordinaria, convocò i suoi consiglieri per decidere sui provvedimenti da prendere. Il più sapiente disse: « Questa donna ha avuto qualche tempo fa un bambino, adesso essa ne ha due, andando avanti così potrà averne quattro e forse ancora di più. Propongo perciò d'uccidere i gemelli, perchè altrimenti queste famiglie potranno diventare così potenti da scacciare tutti noi ». Così fu deciso. Dopo qualche tempo anche una moglie del capo partorì due gemelli e il padre, volendo salvare la sua prole, convocò il popolo, per spiegare che è crudele uccidere i neonati e che si dovrebbe pertanto abbandonare il costume solo recentemente introdotto. La gente povera non ne volle però sentire e gridava: « Tu l'hai fatto coi nostri figli, lo devi ora fare anche coi tuoi ». Il costume di sopprimere i gemelli non è stato perciò cambiato.

Non voglio entrare qui in una analisi della leggenda suddetta o delle diverse spiegazioni raccolte, ricorderò solo ancora una risposta che più chiaramente rivela il lato razionale del costume in parola. Un vecchio Wukaranga, senza la minima suggestione da parte mia, fece rilevare la somiglianza « pericolosa » che corre tra il caso di gemelli e quello di due nascite che si sono seguite una all'altra a distanza di tempo troppo breve.

Difatti tanto l'uccisione di gemelli quanto il tabù del concepimento anzitempo hanno un elemento razionale nella difficoltà o magari impossibilità, per la donna primitiva, d'allevare contemporaneamente due bambini d'età tenera.

Il costume d'uccidere solo uno dei gemelli, osservato presso qualche tribù locale, dovrebbe dunque soddisfare in pieno la suddetta esigenza razionale. Nella mentalità prelogica, però, dell'uomo primitivo ciò che è raro è ipso facto anche anormale e come tale dovuto a quelle forze maligne che turbano il corso regolare delle vicende di questo mondo. Il terrore del parto gemello, fenomeno oltremodo raro in una piccola comunità chiusa, è rinforzato forse anche dalla maggiore mortalità di questi neonati, spesso meno resistenti. La stessa credenza essere i gemelli affetti da qualche influenza maligna è provata dall'uso diffusissimo di seppellirli in terra umida.

Il costume in discussione, come tanti altri, è formato dunque da un *nucleo razionale incorniciato dalla più grossolana superstizione.*

Sarebbe, in ogni modo, arbitrario ravvisare in questo elemento razionale l'idea della conscia limitazione delle nascite.

Ma se molti sono i pericoli, tanto maggiore è la gioia, quando la donna ha regalato alla tribù un bambino normale. Presso i Mashona la levatrice, esaminato il neonato, alza un forte e lungo grido di gioia (mupururu), le altre donne nella capanna le fanno eco, la gente fuori lo ripete e presto tutto il villaggio risuona di questo selvaggio, ma espressivo urlo d'esaltazione. Il gruppo non morirà, ecco un altro che risponderà allo stesso mutupo (totem).

Per la madre però cominciano subito altre ansie ; ella sa che proprio in questo stadio di vita il bambino è facile vittima delle influenze maligne d'ogni specie.

Il suo primo pensiero è di preservare il neonato dal pericolo di futura sterilità, perchè è anzitutto l'elemento essenziale della felicità che i malevoli nemici e invidiosi tentano di colpire. Appena il latte si presenta, essa lo strofina sul lombo del bambino, poi una cordicella con qualche « medicina » gli viene attaccata intorno alle anche. Questa e tante altre cose sono sicura garanzia di futura fecondità.

Presso molte delle tribù studiate la madre deve con grande ansietà seguire anche la prima dentizione. Un antico e diffusissimo costume chiede la soppressione d'ogni bambino al quale i denti superiori sono spuntati prima di quelli inferiori.

Le ragioni date dagli indigeni per giustificare l'uccisione di questi bambini, detti dai Bavenda « shenga » (masticatori), variano da regione a regione. Le due versioni più correnti sono che il loro morso sarà micidiale o che essi rassomigliano al coccodrillo.

La madre ansiosa tenterà di prevenire la disgrazia strofinando la gengiva con diverse « medicine » e se, malgrado tutto, dovesse spuntare prima un dente superiore, ella farà il tentativo di rimuoverlo clandestinamente.

Significato demografico di qualche tabù.

Passeremo ora in rassegna alcuni elementi etnografici che, almeno a prima vista, sembrano contrastare con la rilevata tendenza al massimo incremento della popolazione. Sarà mio compito di dimostrare che molti degli usi e costumi, apparentemente, contrari all'interesse demografico, non lo sono in realtà o non appaiono tali agli occhi del Bantù.

Degni di considerazione sono anzitutto i diversi tabù della vita matrimoniale, tra cui il seguente è certamente il più importante dal punto di vista demografico. Presso tutte le tribù studiate il concepimento è tabù per una donna, il cui bambino precedente non abbia raggiunto una certa età. Si impone così ad ogni madre un *considerevole intervallo minimo tra due nascite successive.*

L'intervallo in parola varia da regione a regione ed è in diretta dipendenza dalla durata del periodo d'allattamento che va da due a tre anni. Tra due parti successivi si avrà così un intervallo minimo di 3-4 anni, e difatti assai raramente ho trovato bambini con una differenza d'età minore.

La lunga durata del tabù in parola ha dato luogo a diverse interpretazioni e viene usata da qualcuno quale prova per la tesi della minore sensualità dell'uomo primitivo. Pur rimanendo fermo nella mia intenzione d'evitare in queste note preliminari ogni discussione di natura comparativa o comunque polemica, devo già adesso rilevare che le conclusioni degli etnografi si basano spesso sulla confusione tra il tabù del concepimento e quello del contatto sessuale, mentre, almeno per le tribù da me studiate, si tratta di due proibizioni ben distinte.

Il Bantù appena era riuscito a vincere la sua naturale riluttanza a conversazioni del genere, faceva spontaneamente una *rigida distinzione tra i due tabù in parola.*

Le relazioni sessuali tra i coniugi riprendono dopo qualche mese dal giorno dell'ultimo parto e tale ripresa è preceduta da una speciale cerimonia di purificazione (1). Ciò avviene in qualche regione dopo 2-3 mestruazioni, altre tribù aspettano finchè al bambino precedente siano spuntati i primi quattro denti, infine alcuni gruppi locali hanno per tale cerimonia un termine fisso.

Nella maggioranza dei casi il tabù concernente la coabitazione vale circa 3-4 mesi dopo il parto e solo assai raramente esso raggiunge la durata di un anno. L'astensione imposta dal costume indigeno non è dunque tanto lunga quanto essa appare da qualche trattazione teorica in argomento.

Solo il concepimento, come già ho rilevato, è proibito per un periodo di 2-3 anni. Dopo la purificazione fino a tale termine la coa-

---

(1) La purificazione della madre consiste normalmente nella somministrazione di diverse « medicine », però presso qualche tribù la cerimonia è molto complicata e, per la sua natura ripugnante, di difficile descrizione.

bitazione può avvenire, salvo le precauzioni contro l'ingravidamento (1).

Già da questa distinzione risulta chiaro il carattere razionale del tabù in parola. Esso non è altro che una garanzia per il bambino, il quale, data la completa ignoranza del *primitivo* in materia di pediatria, sarebbe condannato a sicura morte, se privato del latte della madre restata incinta.

Si capirà così perchè presso i Wazezuru e qualche tribù con essi imparentata spetta alla levatrice il diritto di permettere lo slattamento la conseguente ripresa delle relazioni coniugali normali. Tale donna e funziona così quale patrona del bambino, la cui nascita essa ha curato, e quale persona esperta nell'assistenza all'infanzia.

Quando il bambino ha raggiunto 2-3 anni, la madre lo porta alla levatrice e, presentando un regalo adeguato, chiede il necessario permesso per lo slattamento. Ogni tentativo d'ignorare questa donna sapiente, per risparmiare il regalo, deve considerarsi inutile e piuttosto pericoloso. Un bel giorno la levatrice insospettita si presenterà nel kraal della sua ex-paziente e premerà alcune goccie di latte della madre negli occhi dell'infante. Se il divezzamento è avvenuto senza previo permesso, il disgraziato bambino perderà certamente la vista. La paura di tale terribile sanzione rende rarissimi i casi d'evasione del tributo in parola.

Quasi tutte le tribù studiate credono che il concepimento anzitempo provochi, come sanzione per la trasgressione del tabù, la morte del bambino nato per ultimo. Però la ripresa del contatto sessuale senza le necessarie cautele deve portare qualche malattia anche al marito colpevole. Così per es. un Mushona che sa d'aver commesso simile fallo si guarderà bene di traversare un fiume, perchè è proprio là che gli antenati hanno depositato potenti « medicine » contro coloro che hanno trasgredito un tabù essenziale alla vita della tribù.

La proibizione in parola non deve però, in alcun caso, essere interpretata come forma di limitazione volontaria delle nascite. Il suo scopo è, come già rilevato, la salvaguardia dell'infanzia.

Si ricordi che la donna bantù nutrisce già il bambino di 2-3 anni con pappa, birra indigena e latte denso. Pare che esso debba ogni momento soffocare e la madre, di tempo in tempo, preme con grande compiacimento il pancione del figliolo per vedere se esso è già suffi-

(1) Presso tutte le tribù studiate, gli uomini praticano, come metodo preventivo la non *immissio seminis*.

cientemente teso e ben tondo. Chi ha visto questo procedimento tragicomico può farsi un'idea dell'incremento nella mortalità infantile già sufficientemente alta, se il divezzamento dovesse avvenire ad una età più tenera.

Anche le sanzioni più superstiziose non hanno fatto dimenticare all'indigeno questa base razionale del tabù in parola. Mia moglie deve spesso, nella sua pratica medica, spiegare agli Amandabele locali « la legge dei bianchi » che punisce l'aborto provocato. Il solito ritornello delle loro insistenze è : « Questo pezzo di sangue (feto) deve essere rimosso, perchè se crescerà ucciderà il mio piccolo bambino ».

Presso tutte le tribù studiate la donna è considerata tabù anche dopo un aborto. La ripresa delle relazioni sessuali è permessa agli Amandabele solo dopo 3-4 mesi ed è preceduta da una speciale cerimonia di purificazione. Altre tribù estendono la proibizione in parola ad un periodo ancora più lungo ed hanno per la sua rimozione riti complicatissimi e spesso oltremodo ripugnanti.

Presso una parte dei Baroze il tabù si prolunga fino a sei mesi e la donna può coabitare col marito solo dopo aver avuto contatto sessuale con qualche altro uomo. I Bavenda considerano invece necessaria una lunga cerimonia, alla quale prendono parte i due coniugi e che in molti dettagli rituali è simile a quella delle nozze.

Il tabù e le diverse cerimonie di purificazione sono conseguenza diretta della credenza che l'aborto è sempre dovuto all'intervento di forze maligne. Una donna che ha avuto alcuni aborti è considerata vittima prescelta dagli spiriti malefici e il marito può ripudiarla, col diritto alla restituzione della lobola.

Notevole è la concezione diffusa tra i Bantù che l'aborto, in certo senso, distrugga i legami matrimoniali. Quando interrogo una donna sul numero degli aborti, ella risponde « la famiglia è stata distrutta » due o tre volte. E non si tratta semplicemente d'una metafora, perchè ho potuto convincermi che spesso le cerimonie della purificazione sono accompagnate da riti simbolizzanti la « ricostruzione » della famiglia.

L'influenza nefasta di qualche mudzimu offeso o di umtakati (stregone) nemico, manifestatasi nell'uccisione del nascituro, è diretta contro la base stessa del matrimonio e provoca perciò la distruzione della famiglia. Quest'ultima, ricostruita attraverso un rito speciale forma una nuova unità che forse sarà risparmiata dalle forze magiche.

Severissimo è anche il tabù che concerne la donna nel periodo di mestruazione. Molti Makaranga chiedono l'astensione solo per 3-4 giorni, presso altre tribù essa ha invece un termine fisso di circa sei giorni.

Il tabù ha come il sacer latino un doppio significato, e precisamente esso abbraccia contemporaneamente il concetto di sacro e quello di esecrato (abbominevole). Ambidue questi elementi si ritrovano nella proibizione in parola, vi è il carattere sacro dell'organo della riproduzione e il terrore istintivo di quella emorragia, nella sua spontaneità e periodicità, tanto misteriosa.

Il tabù del contatto sessuale *intra menstruationem* deve essere dunque uno dei più antichi e più universali. Le ragioni attualmente date per giustificare la proibizione in parola variano invece da regione a regione. Dalle numerose risposte da me raccolte cito qui, a titolo d'illustrazione, la versione diffusa presso gli Amandabele. Secondo quest'ultima un uomo che coabita con una donna, durante il periodo di mestruazione, contrae inevitabilmente un grave mal di stomaco, perchè « egli succhia il sangue della moglie e i due sangui non vanno d'accordo ».

Vi è solo ancora da ricordare che il tabù in parola è giustificato anche alla luce della scienza moderna, la quale considera nocivo il contatto sessuale *intra menstruationem*. D'importanza minore deve dirsi il fatto che, secondo qualche studio recente, vi sarebbe una maggiore probabilità di concepimento nella seconda fase della mestruazione.

Istruzione sessuale.

L'esaltazione della funzione procreativa forma anche il contenuto principale dell'insegnamento impartito durante i diversi riti di passaggio. Le cerimonie che segnano il passaggio alla pubertà o alla età nubile sono spesso vere e proprie scuole, dove i candidati ottengono esauriente istruzione in materia sessuale, se anche non proprio del tipo invocato da qualcuno in Europa.

Tale insegnamento è particolarmente curato presso quelle tribù dell'area da me studiata che praticano la circoncisione, tali sono i Waremba, Wapfumbi, Bavenda ed alcuni gruppi meno numerosi. Il problema della origine di tale costume richiede troppi riferimenti di carattere comparativo per essere trattato nel limiti ristretti di queste note. Tenterò solo d'illustrare con qualche esempio gli scopi e il carattere dell'insegnamento summenzionato.

La murundu, scuola d'iniziazione dei Bavenda, consiste di un numero di capanne, dove i candidati d'ambo i sessi vengono tenuti per più settimane. L'istruzione che precede e segue l'operazione stessa è a base di simboli, metafore e formule, insegnate in una lingua speciale, misteriosa e talvolta poco comprensibile per gli insegnanti stessi.

Il simbolo che domina tutti i riti di questa scuola è il ballo del serpente. La fila dei candidati, messi uno dietro l'altro, descrive per ore e ore un movimento ondulatorio intorno al fuoco rituale.

Il serpente, il cui movimento caratteristico si tenta di imitare, è per i Bantù spesso simbolo della fertilità. I Bavenda credono anzi che nelle viscere della donna viva un piccolo serpentello che porta il seme all'utero e « costruisce » il bambino.

Nelle notti viene spiegato il significato dei diversi tabù della vita coniugale. Vengono, per esempio, portati due vasi, uno con liquido rosso, l'altro con liquido bianco ; si spiega ai candidati che il primo rappresenta la donna che è tabù per sei giorni ogni mese. Anche le altre metafore, riferite da qualche osservatore, sono dello stesso carattere e della medesima ingenuità.

Con simili metodi si insegna alle ragazze il significato di diversi tabù connessi colla vita sessuale. Inoltre esse imparano come comportarsi durante la gestazione e vengono insegnati i primi elementi della pediatria dei Bantù.

Diverse cerimonie che hanno lo stesso scopo sono, per il loro carattere ripugnante, inadatte alla descrizione.

Una vera scuola di vita famigliare è la « mahumbgwi », osservata in qualche distretto della Rhodesia.

I ragazzi che hanno raggiunto la pubertà vengono riuniti per costruire un kraal, composto di un numero di capanne per singole famiglie e di due capannoni, uno « gota » per scapoli e l'altro « nanga » per ragazze da marito. I giovani eleggono quindi un capo, il quale, a imitazione della tribù, reggerà, insieme coi suoi consiglieri, uno stato in miniatura per tutta la durata della mahumbgwi.

Quando tutto è pronto arrivano le ragazze d'età corrispondente e scelgono dei « mariti » temporanei. Ogni « famiglia » va ad abitare in una delle capanne preparate, mentre coloro che non hanno trovato coniuge vanno a stare nella gota, o rispettivamente nanga.

Nella mahumbgwi tutto si svolge ad imitazione d'un vero villaggio, abitato da tante famiglie. Le « mogli » preparano i cibi per i rispettivi « mariti », e questi vanno a caccia o alla pesca, sforzandosi di mostrare la propria abilità e di portare a casa quanto più possibile.

Tutto il giorno i « coniugi » sono occupati in diversi lavori, sempre intenti a mostrarsi nella migliore luce. Di sera essi si recano nei rispettivi villaggi, per pernottare coi genitori. Di mattina essi ritornano alla mahumbgwi e la « vita famigliare » viene ripresa.

La scuola che suole durare alcune settimane si chiude con una grande festa, alla quale il « capo » va ad invitare tutto il vicinato, mentre i suoi sudditi temporanei preparano la birra e procurano la carne.

La mahumbgwi ha, come vediamo, molti elementi che fanno pensare ad una *scuola del sistema Montessori*, applicata alla preparazione per la vita famigliare.

Presso le tribù che non seguono il costume della circoncisione vi sono diversi altri riti per celebrare il passaggio alla pubertà.

I Barozi hanno, per es., il costume detto « mwalianyo », secondo il quale la ragazza che ha avuto la prima mestruazione deve nascondersi nella boscaglia e non esser vista da un uomo per la durata d'un mese. Essa ritorna ogni sera nel villaggio per pernottarvi, ma già a l'alba deve fuggire al nascondiglio prescelto. La ragazza riceve lunghe e frequenti visite delle vecchie donne del kraal che le impartiscono lezioni in materia sessuale, una di esse facendo la parte dell'uomo.

La prima polluzione dà luogo anche essa ad una speciale cerimonia, chiamata dagli Amandabele « ukutshaywa lizibuko » (anche « uthomba »). Il ragazzo svegliatosi dal sogno erotico seguito dalla prima emissione, si reca subito completamente nudo al più vicino fiume per farvi delle abluzioni. Fatto questo egli non rientra nel kraal, ma si ferma al recinto, dove gli altri giovani accortisi dell'accaduto, lo ricevono con una solenne picchiata.

Però ciò è solo l'inizio di una lunga serie di maltrattamenti che egli dovrà subire pazientemente, per dare prova delle proprie doti di resistenza. Per alcuni giorni il disgraziato deve rimanere nella boscaglia, mangiare poco o niente e attenersi a diversi costumi poco gradevoli, così per es. egli dovrebbe sedersi solo su formicai. Ritornato finalmente nel kraal, l'attendono ancora le torture dell'immancabile « medico » e la « ukutshaywa » si conclude con una festa per tutto il vicinato.

Le prove di resistenza e gli altri particolari del costume suddetto variano, naturalmente, da regione a regione, rimane però l'idea comune d'impressionare il giovane coll'importanza del passaggio da lui compiuto e d'insegnargli gli elementi del comportamento sessuale.

Gli stessi Amandabele hanno un corrispondente costume per le ragazze che hanno avuto la prima mestruazione. Esso è chiamato «ukudunduzela» e consiste in diverse abluzioni e in una grande festa, accompagnata da balli orgiastici di difficile descrizione. Alle ragazze vengono insegnate le regole della vita sessuale ed esse vengono avvertite che non potranno più indulgere in certe pratiche senza incorrere nel pericolo di restare incinte. I Bavenda, in ogni senso più scrupolosi, sottolineano questo passaggio con un cambiamento di nome: le ragazze che prima si chiamavano « musidzana » (ragazzette) diventano dopo la cerimonia in parola « musidzana vha khomba » (ragazze pericolose).

Morale sessuale.

I costumi descritti non sono certamente atti a mantenere un velo poetico intorno alla funzione riproduttiva. Il linguaggio del Bantù, anche se parlato in presenza di bambini, è egualmente di tale realismo brutale da distruggere ogni possibilità d'idealizzazione in materia. Se ciò non bastasse l'infante vede spesso gli organi della riproduzione dipinti in modo grossolano, ma espressivo, sulle mura della capanna per propiziare gli spiriti della fertilità.

Dai primi mesi di raggiunta pubertà il sesso diventa per il giovane Bantù contenuto principale della conversazione e centro fisso intorno al quale gira la maggior parte delle sue idee. Forse proprio a questo straripare della sessualità si deve *l'arresto nello sviluppo mentale*, tanto spesso osservato nell'indigeno in tale periodo di vita. La non frenata preoccupazione del sesso sembra gettare una fitta ombra su tutte le attività mentali, in questa fase decisiva per l'evoluzione dell'individuo.

La sensualità dell'uomo primitivo è sublimata e talvolta anche mitigata solo dal suo profondo rispetto della maternità e del fenomeno della riproduzione in genere. Su questo contrasto è anzi basata la sua netta distinzione tra i due elementi della sessualità: lo sfogo passionale e il desiderio di vedersi continuato. Ne è derivata in certo senso, la contrapposizione della donna quale madre alla donna come femmina.

Dallo stesso contrasto è nato il particolare atteggiamento del Bantù verso ciò che noi sogliamo chiamare castità. Da una parte, l'autorizzazione di completa licenza di costumi tra i giovani, dall'altra la necessità di conservare la verginità e di evitare l'ingravidamento.

È caratteristico che presso tutte le tribù trovo un termine speciale per indicare l'atto pseudo-sessuale del periodo premaritale. Alla « u davhula » dei Bavenda corrispondono la « gangisa » dei Batonga, la « ukudhlala » degli Amandabele, etc.

La logica brutale va più oltre e fa di questa specie di contatto sessuale un oggetto d'insegnamento pubblico. Presso diverse tribù studiate, durante le cerimonie di passaggio, si insegna alle ragazze come aver relazioni, senza inciampare nelle conseguenze della deflorazione e della gravidanza.

Alle candidate viene contemporaneamente impresso il dovere di conservare la verginità. Dopo ogni grande ballo — scarica orgiastica nel vero senso della parola — esse vengono sottoposte ad un esame da parte delle vecchie del villaggio.

Il grado stesso della importanza attribuita a questo elemento della castità varia però considerevolmente da regione a regione. Presso qualche gruppo locale l'uomo, che ha sufficiente ragione di dubitare della verginità della sua sposa novella, ha il diritto di ripudiarla, facendola accompagnare con un messaggero portante una zappa perforata (bobora badza). Altri, meno radicali in materia, chiedono solo dal suocero qualche pezzo di bestiame a titolo di compenso. Infine qualche altra tribù non dà al marito alcun diritto d'azione.

In quanto al seduttore, egli, normalmente, deve sopportare certe conseguenze solo se la ragazza è stata resa gravida. Il padre di lei chiederà, secondo il principio della lobola, un compenso speciale (rutsambo) e anche qualche cosa per il mantenimento del bambino (mereko), finchè esso è piccolo. Quando l'infante ha raggiunto una certa età, esso viene consegnato al suo padre naturale, dal quale prende anche il totem.

In complesso non si tratta di una questione di moralità o di stato legale, ma di una offesa al diritto di proprietà. La donna appartiene al gruppo e ad esso spetta il compenso per i figli che da lei vengono dati alla luce.

Lo stesso ordine di idee si nota a proposito dell'adulterio commesso con una donna maritata. Il marito offeso non mostrerà segni d'indignazione, ma con molta insistenza chiederà un risarcimento da parte del colpevole. La moglie, la cui riputazione morale non corre molto pericolo, spesso sarà di grande aiuto nell'ottenere le 2-3 vacche di multa.

In questa materia la donna è generalmente creduta, ma se anche l'uomo dovesse insistere nel negare, vi sono diversi mezzi per vincere la causa. Una delle prove più convincenti vige presso la numerosa tribù dei Makaranga.

L'accusatrice, in presenza di tutta la corte giudiziaria e del solito pubblico avido di sensazioni, si toglie lo shashiko (la pelle che cinge i fianchi) e batte con esso l'ex-amante. Il fatto che essa, vincendo il pudore, è rimasta nuda di fronte a tanta gente viene considerato prova lampante che dice la verità. In tale caso l'accusato non solo dovrà pagare la solita multa di 2-3 capi di bestiame, ma sarà condannato anche a compensare il marito per l'umiliazione subìta, in quanto sua moglie è stata costretta a ricorrere alla prova disperata.

In sostanza è la paura di sanzioni magiche che supplisce le leggi della moralità e serve talvolta quale freno alla forte passionalità del Bantù.

La moglie del Mushona sa per es. che dovrà subito morire, se ha bevuto birra versata dal marito da lei tradito. Essa è convinta anche che il fallo sarà immancabilmente scoperto durante il prossimo laborioso parto. Un marito sentimentale può, del resto, assicurarsi contro l'infedeltà della sposa favorita, dandole secretamente qualche potente « medicina ». La « luganko », usata a tale scopo dai Wazezuru, ha per sicuro effetto la grave malattia di ogni rivale che oserà toccare la donna. Medicine di questa specie sono ricercatissime da ambedue i sessi e formano per lo stregone una delle sue fonti principali d'entrata.

La cosidetta « sympathetic magic » ha, naturalmente, anche qui una parte importante. Così per es. la donna che vuole rendere il marito fedele a lei, o come gli Amandabele dicono vuole farlo un « isituta » (letteralmente stupido), doma un serpente e lo tiene prigioniero.

L'unica proibizione sessuale di valore assoluto, perchè considerata sostanziale per l'esistenza stessa del gruppo e perciò salvaguardata da vere e proprie sanzioni e non già, come le trasgressioni descritte, da un semplice risarcimento di danni, concerne l'incesto. Il problema stesso fu già trattato in un altro capitolo, qui si vuole solo accennare ancora a quei molteplici costumi che servono a rinforzare il tabù contro la promiscuità, costumi che nell'insieme portano il nome di « hlonipa », sinonimo di decenza in generale.

La « hlonipa » vieta ad ogni donna di pronunciare il nome del suocero o di altri parenti maschili del marito in linea ascendentale.

Ma non solo il nome non deve essere pronunciato, ma anche ogni parola che ha un suono simile deve essere evitata. La donna dovrà così per suo uso personale formare una serie di nuove parole, che, attraverso i figli, causano una particolare instabilità di tutti i dialetti.

Secondo lo stesso costume, il suocero non deve mangiare assieme alla nuora e non deve vedere la nudità del suo seno. Molti altri usi del genere hanno l'evidente intento di eliminare tutto ciò che potrebbe portare a qualche intimità di contatto.

L'uomo dovrebbe fare « hlonipa » verso la sua suocera, ma l'obbligo non è di osservanza tanto rigida e può perfino essere sostituito da qualche regalo, accompagnato dalla dichiarazione formale di non essere capace d'osservare il costume.

Molti altri usi che vanno sotto il nome di « hlonipa » hanno la stessa tendenza d'impedire contatti intimi tra la donna ed i parenti dell'uomo o viceversa tra l'uomo ed i parenti della donna. In ambedue i casi la « hlonipa » è nata dal desiderio di agire contro la promiscuità e completa così l'inibizione dell'incesto.

Nella terminologia del primitivo Bantù, moralità e decenza sono sinonimi ; ambedue non significano per lui altro che automatica osservanza dei costumi. Questi solo raramente formano oggetto di riflessione, il fatto che esistono è la loro sufficiente giustificazione e l'ira degli spiriti degli antenati la pronta e terribile sanzione.

Nel momento in cui l'uomo primitivo si libera dalla tirannia assoluta degli istinti, egli cade sotto il non meno rigido ed esigente dominio del costume. Ciò priva la morale del Bantù di ogni carattere di spontaneità, e rende spesso inutile domandare a lui il perchè dei suoi costumi ed usi. Spetta allo studioso ricostruirne l'origine, l'evoluzione e il vero significato.

C. A. GRILLENZONI

I caratteri del fisico e del vestire come fattori demografici

§ 1. — Premessa.

È possibile stabilire se esiste un nesso tra la nuzialità e la fecondità femminile e i caratteri del fisico e del vestire? La domanda ha — se non altro — il pregio della novità, almeno riguardo all'eleganza. Infatti, per quanto sappiamo, finora non è mai stato compiuto nessuno studio che considerasse l'estetica e l'eleganza femminili come fattori demografici. La corporatura e la statura, studiate dal punto di vista fisiologico, non lo sono state, invece, dal punto di vista puramente statistico, nelle loro eventuali influenze sulla precocità, o meno, della scelta matrimoniale.

Crediamo quindi di poter affermare di aver compiuto uno studio di natura completamente nuova. (1) Appunto a la novità dell' argo-

(1) Effettivamente non mi consta che fossero state fatte per l'addietro ricerche sopra le relazioni che passano tra la avvenenza fisica oppure la eleganza o altra caratteristica del vestire della donna, da una parte, e la sua riproduttività, dall'altra. Sono noti, invece, i risultati di due ricerche eseguite nella Università di Pittsburg sulle relazioni tra avvenenza fisica o intelligenza delle studentesse, da una parte, e la loro nuzialità dall'altra, una dovuta a Miss C. F. Gilmore e l'altra a Miss. J. O. Naly. I diagrammi che presentano i risultati della ricerca di Miss Gilmore furono pubblicati dapprima in un opuscolo del Prof. R. H. Johnson (*An Address on Marriage Selection delivered at The First National Conference on Race Betterment at the Battle Creek Sanitarium,* Battle Creek Mich. January, 8, 9, 10, 11 and 12, 1914, e poi nel volume di S. J. Holmes, *Trend of the Race,* New York, Harcourt, Brace and Co. 1921, e nel noto trattatato di P. Popenoe e R. H. Johnson, *Applied Eugenics,* New York, Macmillan Co. 1923. Talune conclusioni della ricerca di Miss Naly sono pure ricordate nel volume del Prof. Holmes, ma non con tutta precisione, come ho potuto riscontrare leggendo il lavoro originale di Miss Naly (*Facial Appearence and other factors in mate selection among college graduates* by Josephine Olivia Naly B. A. Lake Eric College (Master thesis, University of Pittsburg, 1925), a cui ho potuto

mento e a la ristrettezza del campo d'indagine (ristrettezza che, come si vedrà più avanti, era condizione *sine qua non* dell'attendibilità dei dati raccolti) sono dovute — almeno in parte — le molte manchevolezze che appariranno in questo studio. Rivolgiamo pertanto un vivo ringraziamento al Prof. C. GINI, che ci fornì il tema e le direttive generali per questo lavoro, al Prof. L. GALVANI che nel corso di esso ci ha consigliato per la parte metodologica, e al Prof. M. DE VERGOTTINI che ha riveduto il manoscritto.

Avvertiamo fin d'ora che quanto verremo man mano esponendo si riferisce sempre esclusivamente ai casi osservati e che non intendiamo, in alcun modo, di generalizzare le nostre asserzioni.

§ 2 — RILEVAZIONE DEI DATI — LIMITAZIONI QUANTITATIVE E QUALITATIVE DEL CAMPO DI OSSERVAZIONE — NECESSITÀ DI TALI LIMITAZIONI — DESCRIZIONE DELLE SCHEDE USATE — CRITERI SEGUITI NEL DARE UN GIUDIZIO ESTETICO E NEL RISPONDERE AI QUESITI DELLE SCHEDE.

La rilevazione dei dati è stata fatta a mezzo di apposite schede personali: su queste erano elencati tutti quei dati che potevano interessare il nostro studio.

---

avere accesso nella Biblioteca dell'Università di Pittsburg, grazie alla cortesia dei Proff. R. H. Johnson e G. A. Lundberg. Malgrado il cortese interessamento del prof. Lundberg, non mi è invece stato possibile rintracciare il lavoro originale di Miss Gilmore. Le ricerche di Miss Gilmore e Miss Naly concordano nel mostrare un'alta relazione positiva tra l'avvenenza delle studentesse e la loro probabilità di sposarsi; sono discordanti, invece, per ciò che concerne la relazione tra intelligenza e probabilità di sposarsi, che, dalle ricerche di Miss Gilmore, risulterebbe positiva, e, da quelle di Miss Naly, in un caso praticamente nulla e nell'altro negativa. Ricorderò anche che Miss Naly non trovava alcuna relazione tra l'avvenenza delle studentesse e l'età del matrimonio, e trovava, per le studentesse più intelligenti, una mortalità molto più alta, la quale, come nota Miss Naly, potrebbe spiegare la loro minore nuzialità. Dai dati di Miss Naly, non pare che, tra le studentesse sposate distinte secondo l'intelligenza, vi fosse una notevole differenza per ciò che concerne il numero medio dei figli.

È da augurarsi che i risultati suggestivi dei due saggi si Miss Gilmore e di Miss Naly e quelli più importanti esposti in questa memoria del Dr. Grillenzoni invoglino a ricerche vaste e sistematiche in un argomento di cui non vi è bisogno di segnalare la grande importanza dal punto di vista biologico e sociale.

CORRADO GINI.

Naturalmente abbiamo dovuto — per prima cosa — porre dei limiti al nostro campo di osservazione. Tali limitazioni sono condizioni indispensabili di omogeneità e di attendibilità.

La prima limitazione che ci siamo dovuti imporre è stata quella del numero complessivo dei casi osservati. In una rilevazione che, òltre ad essere quantitativa, era anche, e principalmente, qualitativa e soggettiva, si correva il rischio, affidandosi a vari osservatori — diversi, ma di numero necessariamente ristretto — di cadere in disparità di giudizio che, non compensate dal numero degli osservatori, avrebbero dato luogo ad ogni sorta di inesattezze. Abbiamo voluto quindi controllare personalmente ogni singolo caso, almeno per l'apprezzamento qualitativo. Questa unità di giudizio, se è andata a tutto vantaggio dell'esattezza delle osservazioni, ci ha però costretti a limitarne il numero a soli 1500 casi. Oltre questo numero non avremmo potuto andare, in alcun modo, senza l'aiuto di altri osservatori.

Seconda limitazione è stata quella dell'età. Infatti sarebbe stato assurdo prendere in considerazione giovani spose o fanciulle ventenni il cui stato di famiglia avrebbe potuto subire, in futuro, le più impensate variazioni, rendendo così privi di qualsiasi valore i dati raccolti. Abbiamo quindi considerato esclusivamente donne coniugate, la cui attività generativa potesse ritenersi definitivamente chiusa, e nubili che, data l'età, offrissero solo un *minimum* di probabilità matrimoniali.

D'altra parte la fine sicura del periodo generativo poteva stabilirsi soltanto ad età che avrebbero limitato eccessivamente il nostro campo di osservazione : in conseguenza, piuttosto che stabilire un'età fissa, abbiamo preferito attenerci a l'osservazione del peculiare svolgimento dell'attività generativa di ogni singolo caso. Così abbiamo considerato chiuso tale periodo generativo anche sotto i limiti che normalmente imporrebbe la natura quando, dopo la nascita di uno o più figli, ci si presentava un tale lasso di tempo senza prole, da lasciar ragionevolmente supporre che la produzione ne fosse terminata. Lo stesso dicasi per le donne sterili. In ogni modo non sono state mai considerate donne al disotto del limite minimo dei 30-35 anni : ed anche questo limite è stato raggiunto solo in rari casi di matrimoni assai precoci e con prole scarsa, o addirittura nulla.

Come limite superiore non abbiamo mai voluto oltrepassare i 60-65 anni, onde restare, *grosso modo*, nell'àmbito di una stessa generazione. Questo, non tanto in vista della possibilità di una modificazione dei caratteri fisici della razza, quanto di quella, ben più fondata, della variabilità del costume.

Il costume, nel nostro studio, ha un'importanza capitale. Infatti, fermo restando che ciò che maggiormente influisce su la maggior o minor preoccupazione, da parte della donna, della propria estetica sono le inclinazioni personali, è indubitato che anche il costume dell'epoca vi influisce in maniera tutt'altro che trascurabile.

A lo stesso modo può pensarsi che il costume non sia estraneo a le preferenze che guidano l'uomo nella scelta matrimoniale ed è ovvio che ogni generazione è caratterizzata da un suo proprio *habitus*, da una particolare *forma mentis*, determinata sia da la generazione precedente, sia da i fatti esterni e da l'atmosfera morale che ne hanno accompagnato lo sviluppo.

La generazione di donne da noi considerata è quindi, press'a poco, quella la cui nascita risale a l'ultimo trentennio del secolo scorso.

La stessa ragione che ci ha fatto escludere dal nostro esame le donne ancor giovani ci ha costretto ad escluderne quelle rimaste vedove dopo pochi anni di matrimonio. Questa esclusione, che in una statistica generale sarebbe un assurdo, era una necessità in uno studio, come quello che ci siamo proposti: del *normale* andamento, cioè, di un particolare fenomeno in un numero ristretto di casi.

Abbiamo scartato i casi di natalità illegittima. Diversamente avremmo dovuto istituire una categoria a parte — del resto assai esigua — la cui fecondità avrebbe presentato un andamento irregolare, data anche, per tacere di ben altre cause incidenti su tale natalità, la discontinuità della convivenza.

Le schede personali usate per la rilevazione contenevano l'indicazione di numerosi dati cronologici (data di nascita, data del matrimonio, data di nascita dei figli, età dello sposo al matrimonio), delle condizioni personali (regione di origine, professione, professione del padre e dello sposo, condizioni economiche della famiglia paterna e dello sposo) e, infine, l'indicazione delle caratteristiche del fisico e del vestire (aspetto fisico della sposa, statura, corporatura, eleganza nel vestire, caratteristiche particolari della *toilette* e aspetto fisico dello sposo).

Per la determinazione dell'aspetto fisico e dell'eleganza nel vestire abbiamo usato una graduazione numerica (0, 1, 2, 3), di molto semplice applicazione.

Va però notato che difficilmente, considerando donne piuttosto avanzate negli anni, si sarebbero potuti attribuir loro elevati coefficienti di eleganza e, specialmente, di bellezza. Abbiamo quindi cercato di dare un giudizio, per quanto era possibile, sintetico e retrospettivo, cercando però di non abbandonarci mai a congetture avventate che potessero portarci fuori da la realtà. È stata questa una delle ragioni principali che ci hanno fatto preferire di tener ristretto il nostro campo di osservazione, pur di mantenere l'unità e l'uniformità di giudizio nell'apprezzamento estetico.

A la voce delle schede : « *altre caratteristiche della toilette* » abbiamo risposto con cinque aggettivi e cioè : *trascurata, semplice, insignificante, accurata, vistosa.*

Nè questa nuova classifica deve sembrare un pleonasmo, perchè non si identifica con il grado (numerico) di eleganza. Nella scelta di tali qualifiche ci siamo preoccupati del fatto che esse dovevano avere non tanto un valore formale ed estetico, quanto il còmpito di rilevare la parte che l'abbigliamento, l'apparenza esteriore, rappresentavano nella mentalità della donna in questione e, se possibile, un indice delle tendenze del suo carattere : tendenze di cui le caratteristiche particolari dell'abbigliamento sono certo una manifestazione. Gli aggettivi che abbiamo scelto possono infatti, per la loro natura, essere attribuiti a la toilette più povera come a quella più ricca e possiamo mettere il loro contenuto etico in rapporto con l'andamento della prolificazione. Fare questo sarebbe stato invece, per lo meno, azzardato, qualora avessimo scelto aggettivi di contenuto puramente formale ed estetico.

Si obbietterà che il giudizio estetico sui caratteri del fisico e del vestire è eminentemente soggettivo. Tale affermazione ha certo un fondamento, ma si può rispondere che, accanto ai casi in cui i giudizî di più persone differiscono più o meno notevolmente, molti ve ne sono in cui tali giudizî sono concordanti. Anche per i casi incerti interviene poi nella massa una notevole compensazione. Così che pare verosimile che ciò che è vero per l'insieme delle donne che vengono giudicate belle ed eleganti da una persona lo sia anche per quelle che vengono giudicate tali da un'altra. Non si nega, dunque, che il metodo seguìto contenga una certa dose di arbitrio, ma si tratta di un arbitrio inevitabile che in pratica non è tale da consigliare ad abbandonare una ricerca di così vivo interesse.

§ 3. — Scelta e combinazione dei dati — Costruzione delle tabelle base — L'intervallo dal matrimonio al primo figlio e le caratteristiche fisiche.

Tra i vari dati fornitici da le nostre schede, abbiamo scelto, come caratteristiche fondamentali, i seguenti:

I) *Eleganza nel vestire* (0, 1, 2, 3);
II) *Aspetto fisico della sposa* (0, 1, 2, 3);
III) *Corporatura della sposa* (snella, regolare, tozza);
IV) *Statura della sposa* (alta, media, bassa);
V) *Caratteristiche della toilette* (trascurata, semplice, insignificante, accurata, vistosa);
VI) *Aspetto fisico dello sposo* (0, 1, 2, 3). Di quest'ultimo sarà detto più avanti. Le prime cinque sono state successivamente combinate, in altrettante tabelle:

A) con il numero delle nubili e delle coniugate (Tab. I, II, III, IV, V);
B) con il numero complessivo dei figli avuti (Tab. I, II, III, IV, V);
C) con l'età della sposa al matrimonio (Tab. VI, VII, VIII, IX, X);
D) con l'intervallo dal matrimonio a l'ultimo figlio (Tab. XI, XII, XIII, XIV, XV).

Mentre le combinazioni *A*) mettono in rilievo le relazioni che passano tra lo stato civile e le cinque caratteristiche considerate, quelle *C*) permettono di esaminare l'influenza di detti caratteri su l'età delle spose al matrimonio.

Lo stesso si dica per le *B*) e le *D*): queste ultime ci danno la durata della convivenza feconda. L'andamento del fenomeno è molto simile a quello del numero dei figli avuti, ma non del tutto coincidente, come si vedrà.

In tal modo abbiamo cercato di analizzare le relazioni che passano tra la matrimonialità e la prolificità della donna ed i caratteri fisici e del vestire della stessa. Tale era lo scopo dello studio che ci siamo proposti.

Inoltre abbiamo voluto vedere se anche l'aspetto fisico dello sposo influiva sul numero dei figli e abbiamo combinato questi due caratteri nella Tab. XVI.

L'ultima ricerca che abbiamo voluto fare è stata quella su l'attrazione matrimoniale con riguardo a l'aspetto fisico degli sposi. Abbiamo così combinato l'aspetto fisico della sposa con quello dello sposo (Tab. XVII).

Avevamo anche combinato le suddette cinque caratteristiche con l'intervallo dal matrimonio al primo figlio, ma non abbiamo portato a termine tale ricerca, che ci parve di poco interesse. Infatti la stragrande maggioranza (circa l'85 %) aveva avuto il primo figlio dopo il primo anno di matrimonio e solo il 7 o l'8 % lo aveva avuto dopo il secondo. L'eleganza pareva non influirvi e l'aspetto fisico neppure. I casi di donne che avevano avuto il primo figlio dopo il secondo anno di matrimonio erano leggermente accentrati nelle corporature snelle e nelle stature alte.

§ 4. — Elaborazione dei dati — Indice di connessione — Indice di correlazione — Indice di omofilia — Percentuali — Medie — Raggruppamenti delle classificazioni molto suddivise e medie relative.

Su le 17 tabelle base così ottenute, abbiamo calcolato vari indici, per vedere quali relazioni intercedessero rispettivamente tra i vari caratteri considerati. *L'indice di connessione* (1) era quello che meglio si prestava a misurare queste relazioni. Tale indice è, infatti, una media ponderata degli indici di dissomiglianza tra i vari gruppi parziali delle intensità di un carattere *A*, distribuiti secondo le modalità di un carattere *B*, e il gruppo totale delle intensità di *A*. È evidente che la connessione tra i due caratteri sarà tanto maggiore, quanto maggiore è la dissomiglianza tra i vari gruppi parziali. L'indice è calcolato in maniera che il suo valore oscilli tra 0 e 1.

Per le Tab. I, II, VI, VII, XI, XII, XVII — in cui ambedue i caratteri sono espressi numericamente — abbiamo calcolato anche l'indice di correlazione. I valori ottenuti sono, press'a poco, uguali a quelli dell'indice di connessione.

Per la Tab. XVII, abbiamo calcolato anche l'indice di omofi-

---

(1) V. Corrado Gini. *Di una misura della dissomiglianza tra due gruppi di quantità e delle sue applicazioni allo studio delle relazioni statistiche.* Atti del R. Istituto Veneto di Lettere, Scienze ed Arti, Anno 1914-15, Serie VIII, Tomo XVII, Parte II, pag. 185 e seg.

CARATTERI COMBINATI		Dati	Percentuali (orizzontali)	Percentuali (verticali)	Medie (orizzontali)	Medie (verticali)	Medie a classi raggruppate (verticali)
Nubili e numero dei figli avuti da le coniugate	Eleganza della sposa. . .	I d.	I p. o.	I p. v.	I m. o.	I m. v.	I m′. v.
	Bellezza della sposa . . .	II d.	II p. o.	II p. v.	II m. o.	II m. v.	II m′. v.
	Corporatura della sposa .	III d.	III p. o.	III p. v.	III m.	—	—
	Statura della sposa . . .	IV d.	IV p. o.	IV p. v.	IV m.	—	—
	Caratteristiche della *toilette*	V d.	V p. o.	V p. v.	V m.	—	—
	Eleganza dello sposo . .	XVI d.	XVI p. o.	XVI p. v.	XVI m. o.	XVI m. v.	XVI m′.v.
Età della sposa al matrimonio	Eleganza della sposa. . .	VI d.	VI p. o.	VI p. v.	VI m. o.	VI m. v.	VI m′. v.
	Bellezza della sposa. . .	VII d.	VII p. o.	VII p. v.	VII m. o.	VII m. v.	VII m′. v.
	Corporatura della sposa .	VIII d.	VIII p. o.	VIII p. v.	VIII m.	—	—
	Statura della sposa . . .	IX d.	IX p. o.	IX p. v.	IX m.	—	—
	Caratteristiche della *toilette*	X d.	X p. o.	X p. v.	X m.	—	—
Durata della convivenza feconda	Eleganza della sposa. . .	XI d.	XI p. o.	XI p. v.	XI m. o.	XI m. v.	XI m′. v.
	Bellezza della sposa . . .	XII d.	XII p. o.	XII p. v.	XII m. o.	XII m. v.	XII m′. v.
	Corporatura della sposa .	XIII d.	XIII p. o.	XIII p. v.	XIII m.	—	—
	Statura della sposa . . .	XIV d.	XIV p. o.	XIV p. v.	XIV m.	—	—
	Caratteristiche della *toilette*	XV d.	XV p. o.	XV p. v.	XV m.	—	—
Bellezza della sposa - Bellezza dello sposo . .		XVII d.	XVII p. o.	XVII p. v.	XVII m. o.	XVII m. v.	—

lia (1); quest'indice, infatti, era il più atto a rivelare la attrazione tra persone che appartenevano a un ugual grado dei due caratteri studiati.

Oltre a questi indici, che ci hanno dimostrato l'esistenza di una effettiva connessione tra i vari fenomeni posti a raffronto, abbiamo cercato di rendere più manifesto l'andamento di tali fenomeni calcolandone le medie (Tab. m) e le percentuali. Le percentuali sono state calcolate tanto in senso orizzontale (Tab. p. o.) quanto in senso verticale (Tab. p. v.). Nelle prime è stato ragguagliato a 100 il numero dei casi riscontrati nelle singole modalità delle cinque caratteristiche fondamentali studiate. Nelle seconde è stata invece ragguagliata a 100 la somma dei casi che avevano la stessa intensità del fenomeno considerato (numero dei figli, età al matrimonio, ecc.). Lo stesso si dica per le medie (Tab. m. o. e Tab. m. v.). Successivamente, le suddivisioni molto minute, come quelle dell'età della sposa al matrimonio, della durata della convivenza feconda e del numero dei figli avuti, sono state riunite in gruppi più larghi (Tab. m'. v.), onde renderne più evidente l'andamento, che appariva saltuario e irregolare.

Prima di passare a l'esposizione dei risultati ottenuti ripetiamo, ancora una volta, che essi si riferiscono esclusivamente ai 1500 casi da noi osservati e che non intendiamo generalizzarli in alcun modo.

§ 5. — L'ELEGANZA — COME INFLUISCE SU LA MATRIMONIALITÀ — ID. SU LA PRECOCITÀ DEL MATRIMONIO — ID. SU LA PROLIFICITÀ — ID. SU LA DURATA DELL'ATTIVITÀ GENERATIVA.

Come influisce l'eleganza su la scelta matrimoniale? Consideriamo anzitutto le nubili. Esaminando le percentuali con cui esse figurano nelle quattro diverse categorie di eleganza (Tab. I p. o.), troviamo che, mentre la differenza non è grande fra quelle delle prime categorie, la percentuale della quarta se ne distacca nettamente. Così, mentre dal 13 % per le donne con eleganza 0, si passa gradatamente al 9,5 % per quelle con eleganza 2, nella successiva categoria si discende improvvisamente a 1,9 %. Inoltre l'eleganza media complessiva delle nubili (Tab. I m. v.) è 1,22, mentre l'eleganza media delle 1500 donne considerate (comprese, quindi, le 151 nubili) è 1,49. La differenza è molto sensibile e farebbe supporre che l'eleganza influisse

(1) C. GINI. *Indici di omofilia e di rassomiglianza.* Venezia, Ferrari, 1915.

Tab. I d.

Eleganza	Nubili	Numero dei figli avuti da la sposa												Totali
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	27	21	21	31	22	29	21	12	5	5	9	3	2	208
1	63	59	65	107	86	56	34	22	12	11	5	8	7	540
2	52	65	104	129	81	53	23	16	9	8	1	2	3	546
3	4	41	43	52	39	15	6	4	—	1	—	1	—	206
Totali . . .	151	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1.500

Tab. I p. o.

Eleganza	Nubili	Numero dei figli avuti da la sposa												Totali
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	13—	10,1	10,1	14,9	10,6	13,9	10,1	5,8	2,4	2,4	4,3	1,4	1—	100
1	12,6	10,9	12—	20—	16—	10,4	6,3	4—	2,2	2—	0,9	1,4	1,3	100
2	9,5	11,9	19,1	23,6	14,8	9,7	4,2	2,9	1,7	1,5	0,2	0,4	0,6	100
3	1,9	19,9	20,9	25,2	18,9	7,3	2,9	1,9	—	0,5	—	0,5	—	100

Tab. I p. v.

Eleganza	Nubili	Numero dei figli avuti da la sposa												Totali
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	17,9	11,3	9—	9,7	9,6	18,9	25—	22,2	19,2	20—	60—	21,4	16,7	13,9
1	45—	31,7	27,9	33,5	37,7	36,6	40,5	40,7	46,2	44—	33,3	57,1	58,3	36—
2	34,4	34,9	44,6	40,4	35,5	34,6	27,4	29,6	34,6	32—	6,6	14,3	25—	36,4
3	2,6	22—	18,5	16,3	17,1	9,8	7,1	7,4	—	4—	—	7,1	—	13,7
Totali . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

TAB. I m. o.

Eleganza	Numero medio di figli avuti: dalle coniugate	Numero medio di figli avuti: dal complesso delle donne osservate
0	3,60	3,10
1	3,05	2,66
2	2,45	2,22
3	2 —	1,98
Media generale . . .	2,76	2,47

TAB. I m. v.

Numero figli avuti	Eleganza media	
Nubili	1,22	
0	1,67	
1	1,72	
2	1,63	
3	1,60	
4	1,35	
5	1,16	1,53
6	1,22	
7	1,15	
8	1,20	
9	0,46	
10	1,07	
+	1,16	
Media generale	1,49	

TAB. I m'. v.

Numero figli avuti	Eleganza media
Nubili	1,22
0	1,67
1–3	1,66
4–7	1,26
8–+	0,98

notevolmente su la scelta matrimoniale. Ma le Tab. VI, in cui l'eleganza è combinata con l'età della sposa al matrimonio, vengono a darci maggiori ragguagli a tale riguardo.

L'indice di connessione, per la Tab. VI d. è di 0,054, e quello di correlazione — 0,023. Se quindi l'eleganza influisce favorevolmente su la precocità della scelta matrimoniale, lo fa in misura ridottissima e quasi trascurabile. Si osservino infatti le due Tab. VI p. v. e VI p. o.. L'andamento ne è irregolare e poco chiaro, come, del resto, anche quello delle medie (Tab. VI m. o., VI m. v. e VI m'. v.). Certo vi si nota che l'età media al matrimonio delle donne con eleganza 0 è di anni 24,8, mentre quello della categoria 3 è di 23,87, ma fra le due categorie intermedie la differenza è di segno contrario. Così, nella Tab. VI m'. v. l'eleganza media è identica per tutte le tre classi d'età sotto i trent'anni e decresce poi leggermente con il crescere dell'età al matrimonio. Se ne potrebbe concludere che solamente un'eleganza molto spiccata può essere per la donna un coefficiente leggermente favorevole a la precocità del matrimonio ; forse la presenza dei mezzi finanziari necessari ad alimentare questa ricercatezza non è estranea a tale precocità ; diversamente si spiegherebbe con difficoltà il diverso comportamento delle prime 3 categorie. Si pensi, inoltre, che le non molte persone di povere condizioni osservate (e che sono, generalmente, ben poco eleganti) hanno dovuto abbassare alquanto l'età media al matrimonio delle prime categorie dato che, generalmente, i matrimoni delle classi povere sono più precoci.

L'abbigliamento, quindi, influisce scarsamente su l'età della sposa al matrimonio, ma le nubili sono, in media, notevolmente meno eleganti che non le coniugate.

Vediamo ora come l'eleganza influisca su la prolificità.

L'indice di correlazione fra l'eleganza nel vestire e il numero dei figli avuti è — 0,215 ; l'indice di connessione è 0,187.

Risulta quindi molto evidente l'esistenza di una influenza negativa che, del resto, è facilmente comprensibile. Si aggiunga che fra detti fenomeni esiste una relazione di interdipendenza. Per le donne che hanno una prole molto numerosa, la cura della propria eleganza è resa più difficile da le condizioni di famiglia, spesso disagiate. Si aggiunga la maggior fecondità delle classi meno abbienti nelle quali, evidentemente, l'eleganza è meno curata. D'altra parte si comprende facilmente come una donna che dedica molta cura al proprio abbigliamento, possa essere, più di un'altra, disposta a valersi di metodi repressivi e preventivi della maternità.

TAB. VI d.

ELEGANZA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																							TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	5	12	9	17	17	16	12	19	12	10	3	8	5	10	3	4	3	4	1	1	—	1	1	8	181
1	16	19	23	49	45	44	35	39	41	28	33	21	15	19	7	8	11	4	4	2	1	1	1	6	472
2	14	29	12	58	43	54	38	30	43	20	26	28	17	25	8	12	4	12	5	1	2	2	2	9	494
3	11	8	12	25	18	22	15	12	12	10	10	11	11	10	1	3	1	3	1	1	—	3	1	1	202
TOTALI . . .	46	68	56	149	123	136	100	100	108	68	72	68	48	64	19	27	19	23	11	5	3	7	5	24	1349

TAB. VI p. o.

ELEGANZA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																							TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	2,8	6,6	5 –	9,4	9,4	8,8	6,6	10,5	6,6	5,5	1,7	4,4	2,8	5,5	1,7	2,2	1,7	2,2	0,6	0,6	—	0,6	0,6	4,4	100
1	3,4	4 –	4,9	10,4	9,5	9,3	7,4	8,3	8,7	5,9	7 –	4,4	3,2	4 –	1,5	1,7	2,3	0,8	0,8	0,4	0,2	0,2	0,2	1,3	100
2	2,8	5,9	2,4	11,7	8,7	10,9	7,7	6,1	8,7	4 –	5,3	5,7	3,4	5,1	1,6	2,4	0,8	2,4	1 –	0,2	0,4	0,4	0,4	1,8	100
3	5,4	4 –	6 –	12,4	8,9	10,9	7,4	6 –	6 –	4,9	4,9	5,4	5,4	4,9	0,5	1,5	0,5	1,5	0,5	0,5	—	1,5	0,5	0,5	100

TAB. VI p. v.

ELEGANZA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																							TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	10,9	17,6	16,1	11,4	13,8	11,8	12 –	19 –	11,1	14,7	4,2	11,8	10,4	15,6	15,8	14,8	15,8	17,4	9,1	20 –	—	14,3	20 –	33,3	13,5
1	34,8	27,9	41,1	32,9	36,6	32,3	35 –	39 –	38 –	41,2	45,8	30,9	31,2	29,7	36,8	29,7	57,9	17,4	36,4	40 –	33,3	14,3	20 –	25 –	34,9
2	30,4	42,6	21,4	38,9	35 –	39,7	38 –	30 –	39,8	29,4	36,1	41,2	35,4	39,1	42,1	44,5	21,1	52,2	45,3	20 –	66,6	28,6	40 –	37,5	36,6
3	23,9	11,8	21,4	16,8	14,6	16,2	15 –	12 –	11,1	14,7	13,9	16,2	22,9	15,5	5,3	11,1	5,3	13 –	9,1	20 –	—	42,9	20 –	4,2	17,9
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

TAB. VI m. o.

Eleganza	Età media al matrimonio
0	24,80
1	24,28
2	24,58
3	23,87
Media generale . . .	24,34

TAB. VI m. v.

Età al matrimonio	Eleganza media
—	1,70
18	1,50
19	1,50
20	1,60
21	1,50
22	1,62
23	1,61
24	1,42
25	1,50
26	1,40
27	1,61
28	1,59
29	1,69
30	1,50
31	1,32
32	1,49
33	1,15
34	1,60
35	1,54
36	1,40
37	1,66
38	2 —
39	1,06
+	1,20

TAB. VI m'. v.

Età al matrimonio	Eleganza media	
— – 19	1,55	
20 – 24	1,55	
25 – 29	1,55	
30 – 35	1,45	
36 – 39	1,59	1.43
+	1,20	
Media generale . . .	1,53	

Si vedano, ad esempio, nella Tab. I p. o. le donne con eleganza 3. Di esse il 19,8 % è rimasto sterile, e, per quelle con oltre 5 figli, le percentuali sono minime. Fra le donne con eleganza 0 invece, le sterili sono solamente il 10,1 % e i valori percentuali vanno lentamente decrescendo con l'aumentare della prole : ancora il 6,8 % di esse ha avuto più di 8 figli.

Così se si osserva per linee orizzontali la Tab. I p. v. (nella quale sono calcolati i valori percentuali con cui le varie categorie di eleganza partecipano ai gruppi di donne che hanno avuto uno stesso numero di figli), si vedrà facilmente che gli andamenti delle due categorie 0 e 3 sono nettamente opposti (ben inteso in linea generale e senza tener conto delle inevitabili irregolarità).

Mentre le percentuali della categoria 0 sono nettamente e regolamente crescenti, la categoria 3 raggiunge il suo massimo nelle senza figli, e decresce poi rapidamente tanto che, negli ultimi casi, non è nemmeno rappresentata.

Tale fenomeno appare, del resto, con grande evidenza dalle tabelle delle medie. Si osservino le due Tab. I m. o. e I m'. v. : la prima dà il numero medio dei figli in funzione dell'eleganza, tanto per le coniugate che per tutte le donne osservate ; la seconda (ricavata da la I m. v., meno chiara perchè più estesa) l'eleganza media, in funzione del numero dei figli. In entrambe l'andamento è regolarissimo. Nella prima il numero medio dei figli avuti da le coniugate, che è di 3,60 per la categoria 0, scende successivamente a 3,05, poi a 2,45 e, finalmente, a 2 per la categoria 3. Nella seconda, invece, l'eleganza media, che è di 1,67 per le donne sterili, scende gradatamente fino a 0,98 per le donne che hanno avuto 8 o più figli.

Su la durata della convivenza feconda, l'eleganza esercita, naturalmente, gli stessi effetti che su la prolificità. È però curioso notare come gli indici di connessione e di correlazione (che sono, rispettivamente, 0,170 e 0,207) siano leggermente inferiori a gli indici di connessione e di correlazione tra l'eleganza e il numero dei figli. Lo stesso si verificherà, come vedremo più avanti, per la statura e per la corporatura, mentre per l'aspetto fisico si verificherà il caso contrario, sebbene in misura lievissima.

Nelle Tab. XI p. o. e XI p. v. si può notare lo stesso andamento che abbiamo visto nelle precedenti. Da la prima possiamo rilevare, ad esempio, come oltre il 15 % delle donne con eleganza 2 e 3 abbiano avuto un solo anno di convivenza feconda, mentre nella seconda vediamo che le percentuali con cui le categorie 0 e 1 sono rappresentate

TAB. XI d.

ELEGANZA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	13	3	11	9	15	10	11	7	7	12	11	7	10	7	2	4	5	5	2	5	4	160
1	37	26	39	38	23	25	28	27	31	19	20	19	13	11	7	12	4	6	5	6	17	413
2	67	43	44	40	43	31	30	27	18	19	11	9	5	11	6	4	8	1	1	2	9	429
3	25	18	12	14	19	16	10	7	6	8	1	5	3	6	2	1	2	3	1	1	1	161
TOTALI . . .	142	90	106	101	100	82	79	68	62	58	43	40	31	35	17	21	19	15	9	14	31	1.163

TAB. XI p. o.

ELEGANZA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	8,1	1,9	6,9	5,6	9,4	6,3	6,9	4,4	4,4	7,5	6,9	4,4	6,3	4,4	1,2	2,5	3,1	3,1	1,2	3,1	2,5	100
1	9–	6,3	9,4	9,2	5,6	6,1	6,8	6,5	7,5	4,6	4,8	4,6	3,1	2,7	1,7	2,9	1–	1,5	1,2	1,5	4,1	100
2	15,6	10–	10,3	9,3	10–	7,2	7–	6,3	4,2	4,4	2,6	2,1	1,2	2,6	1,4	0,9	1,9	0,2	0,2	0,5	2,1	100
3	15,5	11,2	7,5	8,7	11,8	9,9	6,2	4,3	3,7	5–	0,6	3,1	1,9	3,7	1,2	0,6	1,2	1,9	0,6	0,6	0,6	100

TAB. XI p. v.

ELEGANZA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	9,1	3,3	10,4	8,9	15–	12,2	13,9	10,3	11,3	20,7	25,6	17,5	32,3	20–	11,8	19–	26,3	33,3	22,2	35,7	12,9	13,7
1	26,1	28,9	36,8	37,6	23–	30,5	35,4	39,7	50–	32,8	46,5	47,5	41,9	31,4	41,2	57,1	21,1	40–	55,5	42,9	54,8	35,5
2	47,2	47,8	41,5	39,6	43–	37,8	38–	39,7	29–	32,8	25,6	22,5	16,1	31,4	35,3	19–	42,1	6,6	11,1	14,3	29–	36,8
3	17,6	20–	11,3	13,9	19–	19,5	12,7	10,3	9,7	13,8	2,3	12,5	9,7	17,1	11,8	4,8	10,5	20–	11,1	7,1	3,2	13,9
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

TAB. XI m. o.

Eleganza	Durata media convivenza feconda
0	9,17
1	8,11
2	6,15
3	6,06
Media generale	7·33

TAB. XI m. v.

Durata convivenza feconda	Eleganza media
1	1,73
2	1,84
3	1,54
4	1,58
5	1,66
6	1,64
7	1,49
8	1,50
9	1.37
10	1,39
11	1,06
12	1,30
13	1,03
14	1,11
15	1,45
16	1,09
17	1,36
18	1,13
19	1,11
20	1,78
+	1,22
Media generale	1,51

TAB. XI m'. v.

Durata convivenza feconda	Eleganza media
1–2	1,75
3–5	1,55
6–6	1,49
10–15	1,23
16–+	1,24
Media generale	1,51

nelle convivenze feconde di 20 anni di durata sono notevolmente superiori a quelle con le quali esse partecipano al totale dei casi osservati, contrariamente a quanto si verifica nelle categorie 2 e 3.

Anche qui è chiarissimo l'andamento delle seriazioni delle medie (Tab. XI m. o. e Tab. XI m'. v.). La durata media della convivenza feconda, che è di anni 9,17 per le donne con eleganza 0, scende gradatamente fino a 6,06 per quelle con eleganza 3. Corrispondentemente l'eleganza media, che per le convivenze feconde di brevissima durata (1 o 2 anni) è 1,75, scende a 1,24 per quelle la cui durata oltrepassa i 16 anni.

Possiamo quindi concludere che *tra l'eleganza e la prolificità esiste una notevole relazione negativa, e che tra l'eleganza e la precocità del matrimonio esiste una lieve relazione positiva. Non sembra verosimile che la precocità del matrimonio influisca in qualche modo sull'eleganza, mentre sembra naturale che l'eleganza determini una certa precocità del matrimonio. Può sussistere invece tanto un'influenza negativa dell'eleganza sulla prolificità quanto della prolificità sull'eleganza in quanto le donne più prolifiche hanno meno tempo disponibile per la cura della propria persona.*

§ 6. — LA BELLEZZA DELLA SPOSA — COME INFLUISCE SU LA MATRIMONIALITÀ — ID. SU LA PRECOCITÀ DEL MATRIMONIO — ID. SU LA PROLIFICITÀ — ID. SU LA DURATA DELL'ATTIVITÀ GENERATIVA.

Non occorrono studi complicati per affermare che — in linea di massima — una donna bella ha più probabilità di sposarsi che non una brutta. Ma vediamo come questo fatto si è in realtà manifestato nei casi da noi osservati.

Si guardi la Tab. II m'. v.: la bellezza media delle nubili è 1,27; quella delle donne coniugate 1,64. La differenza è notevole: più notevole ancora che non quella che si trovò per l'eleganza. Osserviamo, a la Tab. II p. o., le percentuali delle nubili nelle varie categorie: mentre sono rimaste tali il 24,4 % delle donne con bellezza 0, se ne trovano soltanto il 6,4 % tra quelle con bellezza 3. È notevole lo sbalzo improvviso da lo 0 in giù: da 24,4 % si passa subito a 17,3. Questo fatto si spiega pensando che la bruttezza agisca come elemento sfavorevole al matrimonio, analogamente a l'eleganza come incentivo. Come si è visto in precedenza, sono pochissime le nubili con eleganza 3; ora troviamo, per la bellezza, che le nubili rappresentano, nella categoria 0, una percentuale notevolmente superiore a quella che

TAB. II d.

BELLEZZA DELLA SPOSA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	31	18	13	18	13	11	6	5	3	2	6	—	1	127
1	60	54	78	108	88	65	32	18	6	11	3	5	5	533
2	47	91	105	146	89	58	35	24	14	10	6	7	5	637
3	13	23	37	47	38	19	11	7	3	2	—	2	1	203
TOTALI . . .	151	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1.500

TAB. II p. o.

BELLEZZA DELLA SPOSA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	24,4	14,2	10,2	14,2	10,2	8,7	4,7	3,9	2,4	1,6	4,7	—	0,8	100
1	11,3	10,1	14,6	20,3	16,5	12,2	6 —	3,4	1,1	2,1	0,6	0,9	0,9	100
2	7,4	14,3	16,5	22,9	14 —	9,1	5,5	3,8	2,2	1,6	0,9	1,1	0,8	100
3	6,4	11,3	18,2	23,2	18,7	9,4	5,4	3,4	1.5	1 —	—	1 —	0,5	100

TAB. II p. v.

BELLEZZA DELLA SPOSA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	20,5	9,7	5,6	5,6	5,7	7,2	7,1	9,3	11,5	8 —	40 —	—	8,3	8,5
1	39,7	29 —	33,5	33,9	38,6	42,4	38,1	33,3	23,1	44 —	20 —	35,7	41,7	36 —
2	31,7	48,9	45,1	45,8	39 —	37,9	41,7	44,4	53,8	40 —	40 —	50 —	41,7	42 —
3	8,6	12,4	15,9	14,7	16,7	12,4	13,1	13 —	11,5	8 —	—	14,3	8,3	13,4
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Tab. II m. o.

Bellezza della sposa	Numero medio di figli avuti: dalle coniugate	Numero medio di figli avuti: dal complesso delle donne esservate
0	3,09	2,33
1	2,86	2,54
2	2,67	2,47
3	2,56	2,39
Media generale . . .	2,76	2,47

Tab. II m′. v.

Numero figli avuti	Bellezza media della sposa	
Nubili	1,27	
0	1,63	
1	1,75	
2	1,69	
3	1,66	
4	1,55	
5	1,60	1,64
6	1,61	
7	1,65	
8	1,48	
9	1 —	
10	1,78	
+	1,50	
Media generale	1,60	

Tab. II m′. v.

Numero figli avuti	Bellezza media della sposa
Nubili	1,27
0	1,63
1–3	1,69
4–7	1,58
8–+	1,44

rappresentano nelle altre categorie. Ciò apparirebbe altrettanto chiaro se si esaminasse la Tab. II p. v. confrontando le percentuali della categoria delle nubili con le percentuali del totale.

È dunque indiscutibile che la bellezza è un coefficiente importante per la scelta matrimoniale: vediamo ora (Tabelle VII) come essa influisca su l'età al matrimonio.

L'indice di correlazione è di — 0,084, quello di connessione 0,098: ci si sarebbe forse, da l'osservazione delle nubili, potuto aspettare un indice più alto. Ma bisogna invece considerare che nella Tab. VII d. su la quale l'indice è stato calcolato, non figurano appunto quelle nubili di cui abbiamo parlato; il gruppo delle coniugate, sulle quali i calcoli sono stati eseguiti costituisce quindi, per così dire, un gruppo selezionato.

Ma, a differenza dell'eleganza, è proprio sull'età media della sposa al matrimonio che la bellezza femminile fa sentire maggiormente la sua influenza. Si vedano, nella Tab. VII m. o., le età medie delle spose al matrimonio, nelle diverse categorie di bellezza. L'età media al matrimonio, che per le donne con bellezza 0 è di 26 anni, si riduce a 22,7 per la bellezza 3. È interessante notare come tra i gruppi 1 a 2 il distacco sia relativamente piccolo (sono 24,65 e 24,05 rispettivamente), mentre è molto accentuato tra essi e i due gruppi estremi.

La stessa cosa si nota nella Tab. VIII m'. v.. La bellezza media delle donne che si sposarono prima dei 19 anni è di 1,84, mentre è di solo 1,27 la bellezza delle donne che contrassero matrimonio dopo il 35° anno di età; tra i gruppi intermedi invece le oscillazioni sono di poca importanza e talvolta incerte.

Si notino, nelle tabelle VII p. o., le basse percentuali dei matrimoni molto tardivi nella categoria 3, mentre ancora il 6,2 % delle donne con bellezza 0 si sposarono invece dopo i 39 anni; prima dei 18 anni, invece, sposarono il 5,8 delle bellissime, e soltanto l'1 % delle donne della classe di bellezza 0.

Su la prolificità, invece, gli effetti della bellezza femminile sono meno sensibili. L'indice di connessione tra il numero dei figli e la bellezza è 0,074, quello di correlazione — 0,084. Esiste quindi una correlazione negativa tra bellezza e prolificità. Non vogliamo, di proposito, avventurarci in considerazioni di carattere medico che esulano dal nostro campo e che — se giustificate, come si dirà, per la corporatura e la statura — sarebbero per lo meno molto discutibili intorno ad una influenza fisica della bellezza: ma è logico pensare, per le donne molto belle, a un maggior uso di sistemi repressivi della ma-

Tab. VII d.

Bellezza	Età della sposa al matrimonio																							Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	1	1	4	10	6	12	5	8	9	8	1	5	7	3	2	2	1	1	1	—	—	1	2	6	96
1	18	22	19	51	41	51	33	36	29	23	25	22	14	25	9	11	10	10	5	4	2	2	1	10	473
2	16	27	21	67	52	54	50	41	59	28	35	29	22	32	7	13	7	10	5	1	1	3	2	8	590
3	11	18	12	21	24	19	12	15	11	9	11	12	5	4	1	1	1	2	—	—	—	1	—	—	190
Totali	46	68	56	149	123	136	100	100	108	68	72	68	48	64	19	27	19	23	11	5	3	7	5	24	1.349

Tab. VII p. o.

Bellezza	Età della sposa al matrimonio																							Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	1 –	1 –	4,2	10,4	6,2	12,5	5,2	8,3	9,4	8,3	1 –	5,2	7,3	3,1	2,1	2,1	1 –	1 –	1 –	—	—	1 –	2,1	6,2	100
1	3,8	4,7	4 –	10,8	8,7	10,8	7 –	7,6	6,1	4,9	5,3	4,7	3 –	5,3	1,9	2,3	2,1	2,1	1,1	0,8	0,4	0,4	0,2	2,1	100
2	2,7	4,6	3,6	11,4	8,8	9,2	8,5	6,9	10 –	4,7	5,9	4,9	3,7	5,4	1,2	2,2	1,2	1,7	0,8	0,2	0,2	0,5	0,3	1,4	100
3	5,8	9,5	6,3	11,1	12,6	10 –	6,3	7,9	5,7	4,7	5,7	6,3	2,6	2,1	0,6	0,6	0,6	1,1	—	—	—	0,6	—	—	100

Tab. VII p. v.

Bellezza	Età della sposa al matrimonio																							Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
0	2,2	1,5	7,1	6,7	4.9	8,8	5 –	8 –	8,3	11,8	1,4	7,4	14,6	4,7	10,5	7,4	5,3	4,3	9,1	—	—	14,3	40 –	25 –	7,2
1	39,1	32.4	33.9	34,2	33,3	37,5	33 –	36 –	26,9	33,8	34,7	32,4	29,2	39,1	47,4	40,8	52,6	43,4	45,5	80 –	66,7	28,6	20 –	41,7	35 –
2	34,8	39,7	37,5	45 –	42,3	39,7	50 –	41 –	54,6	41,2	48,6	42,6	45,8	50 –	36,8	48,2	36,8	43,5	45,5	20 –	33,3	42,9	40 –	33,3	43,7
3	23,9	26,5	21,4	14,1	19,5	14 –	12 –	15 –	10,2	13,2	15,3	17,6	10,4	6,2	5,3	3,7	5,3	8,7	—	—	—	14,3	—	—	14 –
Totali	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Tab. VII m. o.

Bellezza della sposa	Età media al matrimonio
0	26 –
1	24,65
2	24,05
3	22,70
Media generale	24,34

Tab. VII m. v.

Età al matrimonio	Bellezza media della sposa
—	1,80
18	1,99
19	1,67
20	1,66
21	1,76
22	1,58
23	1,69
24	1,63
25	1,66
26	1,55
27	1,78
28	1,70
29	1,52
30	1,57
31	1,36
32	1,48
33	1,42
34	1,56
35	1,36
36	1,20
37	1,33
38	1,57
39	1 —
+	1,18

Tab. VII m′. v.

Età al matrimonio	Bellezza media della sposa
— – 19	1,84
20 – 24	1,68
25 – 29	1,65
30 – 34	1,52
35 – +	1.27
Media generale	1,64

ternità, a lo scopo di conservare intatta, il più a lungo possibile, la propria bellezza.

Del resto non abbiamo che da osservare le cifre : la Tab. II p. o. appare meno chiara di quel che potrebbe essere in realtà, essendo comprese nelle percentuali anche le nubili che, come si è visto, hanno un comportamento alquanto diverso da quello della totalità degli altri casi. Questo fatto che, nella tabella dell'eleganza e nelle altre, dà luogo a perturbazioni di scarso valore, produce qui una diminuzione relativa della categoria 0 e un accrescimento relativo della 3 (riscontrandosi nella prima un numero di nubili molto maggiore che non nella seconda) che ne rende male agevole il confronto. Più chiara è la tabella II p. v., considerata per linee orizzontali : in essa le due categorie estreme presentano due andamenti contrari, ascendente la prima, stazionario o discendente l'ultima, abbastanza chiari. Del resto le due tabelle delle medie (Tab. II m. o. e Tab. II m.' v.) danno la conferma di quanto abbiamo detto. Per le sole coniugate, nei casi di bellezza 0, il numero medio dei figli avuti è 3,09 : esso scende a 2,56 per la bellezza 3. E corrispondentemente la bellezza media da 1,64 per le sterili, scende a 1,44 per le donne con più di 8 figli. In questa ultima tabella II m'. v. è curioso notare che la bellezza media delle sterili è 1,63, mentre quella delle donne che hanno avuto scarsa prole (da 1 a 3 figli) è di 1,69. La differenza è minima e d'altra parte, dato che esiste realmente una connessione dimostrata chiaramente tanto dagli indici quanto da la precedente Tab. II m. o. il fatto si presenta con un'anomalia di cui confessiamo di non esser riusciti a renderci ragione, se non attribuendone la paternità al caso.

Quanto poi a la durata della convivenza feconda, i risultati coincidono con quelli della fecondità. A differenza di quanto notammo per l'eleganza, gli indici presentano qui valori molto bassi e molto simili tra loro. L'indice di connessione è infatti di 0,075 e quello di correlazione è — 0,087.

L'andamento delle tabelle è perfettamente consono a quanto abbiamo esposto, non sussistendo più l'influenza perturbatrice delle nubili che non compaiono. Così, per quanto le intensità siano molto numerose, le tabelle vengono seguite facilmente, specialmente con il metodo, già più volte ricordato, di osservare le seriazioni (orizzontali) delle percentuali con cui una stessa categoria figura nelle varie intensità dell'altro carattere, notando l'andamento diverso di tale seriazione nelle due categorie estreme.

Da la Tab. XII m. o. si vede poi come vi sia esattamente un

TAB. XII d.

BELLEZZA DELLA SPOSA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	6	2	7	9	8	7	4	2	2	5	3	6	3	3	1	2	2	2	—	3	1	78
1	47	24	33	41	29	29	37	20	27	21	22	15	9	11	7	11	4	7	6	5	14	419
2	66	49	54	36	43	31	30	40	24	21	16	14	12	14	8	8	8	3	3	4	15	499
3	23	15	12	15	20	15	8	6	9	11	2	5	7	7	1	—	5	3	—	2	1	167
TOTALI	142	90	106	101	100	82	79	68	62	58	43	40	31	35	17	21	19	15	9	14	31	1.163

TAB. XII p. o.

BELLEZZA DELLA SPOSA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	7,7	2,6	9—	11,5	10,3	9—	5,1	2,6	2,6	6,4	3,8	7,7	3,8	3,8	1,3	2,6	2,6	2,6	—	3,8	1,3	100
1	11,2	5,7	7,9	9,8	6,9	6,9	8,8	4,8	6,4	5—	5,3	3,6	2,1	2,6	1,7	2,6	1—	1,7	1,4	1,2	3,3	100
2	13,2	9,8	10,8	7,2	8,6	6,2	6—	8—	4,8	4,2	3,2	2,8	2,4	2,8	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	0,8	3—	100
3	13,8	9—	7,2	9—	11,9	9—	4,8	3,6	5,4	6,6	1,2	3—	4,2	4,2	0,6	—	3—	1,8	—	1,2	0,6	100

TAB. XII p. v.

BELLEZZA DELLA SPOSA	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
0	4,2	2,2	6,6	8,9	8—	8,3	5,1	2,9	3,2	8,6	7—	15—	9,7	8,6	5,9	9,5	10,5	13,3	—	21,4	3,2	6,8
1	33,1	26,7	31,1	40,6	29—	35,4	46,8	29,4	43,5	36,2	51,2	37,5	29—	31,4	41,2	52,4	21,1	46,7	6,7	35,7	45,1	36,1
2	46,5	54,4	50,9	35,6	43—	37,8	38—	58,8	38,7	36,2	37,2	35—	38,7	40—	47,1	38,1	42,1	20—	3,3	28,6	48,4	42,9
3	16,2	16,6	11,3	14,8	20—	18,3	10,1	8,8	14,5	19—	4,7	12,5	22,6	20—	5,9	—	26,3	20—	—	14,3	3,2	14,1
TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

TAB. XII m. o.

Bellezza della sposa	Durata media convivenza feconda
0	8,35
1	7,63
2	7,07
3	6,84
Media generale . . .	7,33

TAB. XII. m. v.

Durata convivenza feconda	Bellezza media della sposa
1	1,75
2	1,85
3	1,67
4	1,56
5	1,75
6	1,65
7	1,82
8	1,73
9	1,67
10	1,65
11	1,39
12	1,57
13	1,74
14	1,54
15	1,52
16	1,28
17	1,84
18	1,46
19	1,33
20	1,64
+	1,61
Media generale . . .	1,65

TAB. XII m'. v.

Durata convivenza feconda	Bellezza media della sposa
1 – 2	1,77
3 – 5	1,65
6 – 9	1,70
10 – 15	1,53
16 – + ...	1,50
Media generale . . .	1,65

anno e mezzo di differenza tra la durata media della convivenza feconda delle due categorie estreme (differenza, naturalmente, a vantaggio della categoria 0); la Tab. XII m'. v. invece, pur conservando, nel complesso, un andamento perfettamente regolare, presenta una piccola anomalia verso la metà, ma non crediamo che questa sia tale da infirmare in alcun modo quanto siamo venuti esponendo.

Si può quindi concludere che *tra bellezza e probabilità di contrarre matrimonio o precocità del matrimonio stesso esiste una notevole relazione positiva mentre esiste una debole relazione negativa tra bellezza e prolificità. Per la prima relazione non si può ammettere che la matrimonialità eserciti un'influenza sulla bellezza, mentre s'intende facilmente come la bellezza debba rendere il matrimonio più probabile e più precoce; per la seconda relazione, invece, mentre è comprensibile un'influenza della bellezza sulla prolificità, non si può neppure escludere un'influenza della prolificità sulla bellezza in quanto vi è chi ritiene che una intensa funzione riproduttiva delle donne agisce sfavorevolmente sulla loro bellezza e questa è anzi, come è noto, una delle ragioni che inducono alcune donne a limitare la figliolanza.*

§ 7. — La corporatura — Come influisce su la matrimonialità — Id. su la precocità del matrimonio — Id. su la prolificità — Id. su la durata dell'attività generativa.

Sembrerebbe, a prima vista, che la corporatura non dovesse aver influenza su la scelta matrimoniale, data la varietà dei gusti. Pure, per quanto in misura ridotta, una influenza esiste. Si guardino, nella Tab. III p. o., le percentuali che le nubili occupano nelle tre diverse categorie: 8,2 % delle snelle, 9,4 % delle regolari e 17,2 % delle tozze. La differenza tra le due prime categorie è tale che ci parrebbe avventato il volerne trarre delle conclusioni assolute; non così per le corporature tozze, per le quali le donne nubili costituiscono una percentuale molto superiore. Questo dimostra l'esistenza — *per i casi da noi osservati* — di una effettiva ripugnanza maschile per le donne con corporature tozze. Teniamo a dirlo: per i casi da noi osservati. Non va infatti dimenticato che i nostri casi appartengono, nella grande maggioranza, a le classi sociali più elevate. In esse il gusto maschile è frequentemente orientato in un senso diametralmente opposto — per quanto concerne la grassezza — a quello delle classi povere. Dal comportamento di queste ultime nei pochi casi

TAB. III d.

CORPORATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Snella	50	87	96	152	87	59	30	23	9	6	3	4	6	612
Regolare	63	61	100	136	108	71	46	27	16	17	11	8	3	667
Tozza	38	38	37	31	33	23	8	4	1	2	1	2	3	221
TOTALI	151	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1500

TAB. III p. o.

CORPORATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Snella	8,2	14,2	15,7	24,8	14,2	9,6	4,9	3,8	1,4	1 –	0,5	0,6	1 –	100
Regolare	9,4	9,1	15 –	20,4	16,2	10,7	6,9	4 –	2,4	2,5	1,7	1,2	0,5	100
Tozza	17,2	17,2	16,7	14 –	14,9	10,4	3,6	1,8	0,5	0,9	0,5	0,9	1,4	100

TAB. III p. v.

CORPORATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Snella	33,1	46,8	41,2	47,6	38,2	38,6	35,7	42,6	34,6	24	20	28,6	50	40,8
Regolare	41,7	32,8	42,9	42,6	47,4	46.4	54,8	50 –	61,5	68	73,3	57,1	25	44,4
Tozza	25,2	20,4	15,9	9,7	14,5	15 –	9,5	7,4	3,8	8	6,7	14,3	25	14,7
TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

osservati abbiamo ragione di supporre che, qualora il loro gruppo fosse stato il più numeroso, avremmo ottenuto dei risultati opposti.

Non si guardino le percentuali delle nubili nella Tab. III p. v. Esse non sono da prendersi in considerazione, data la grande differenza tra i totali delle tre categorie che, quindi, in questa tabella figurano proporzionatamente al loro numero e non alle loro singole probabilità matrimoniali.

L'indice di connessione tra la corporatura e l'età della sposa al matrimonio è di 0,051 : molto piccolo, cioè, come del resto già si è detto per lo stato civile. Non si dimentichi, però, che la corporatura tozza che — come abbiamo visto or ora — è quella che maggiormente influisce su la probabilità di matrimonio, si riscontra solo in un numero esiguo di casi (221 su 1500) e che, inoltre, la Tab. VIII, su la quale l'indice è calcolato, ha, come già dicemmo in un caso analogo, un valore cronologico e non assoluto.

Dato quindi il piccolo valore della connessione è difficile poter seguire chiaramente il fenomeno sulle due tabelle di percentuali VIII p. o. e VIII p. v.. Si aggiunga che — sempre a causa dello scarso numero delle donne con corporatura tozza — alcune caselle di matrimoni molto tardivi restano, in quella categoria, completamente scoperte, determinando così delle discontinuità che nuocciono a la chiarezza del complesso. Malgrado queste irregolarità si può osservare, nella Tab. VIII p. o., come le percentuali costituite dai matrimoni precoci siano, per le donne tozze, più basse che non per le altre due categorie mentre, malgrado i vuoti, sono più elevate quelle dei matrimoni tardivi. Si guardino, ad esempio, i matrimoni contratti dopo i 39 anni, che costituiscono ancora il 3,8 % delle tozze, mentre sono solo l'1,2 % e 1,7 % delle snelle e delle regolari.

Più chiara è, invece , la Tab. VIII m., che ci dà l'età media al matrimonio. Questa età presenta una piccola differenza tra le snelle e le regolari che si sposano, in media, rispettivamente a 24,57 e a 24,27 anni. Qui dunque il vantaggio spetta alle corporature regolari ed è stato appunto questo fatto (per quanto qui non sia proprio la stessa cosa) che ci ha sconsigliato di attribuire importanza a la differenza tra le snelle e le regolari, che riscontrammo nelle nubili e che là era a vantaggio delle snelle. Per le corporature tozze, invece, la differenza si fa più sensibile, perchè l'età media al matrimonio sale a 25,34 anni, confermando così quanto dicemmo precedentemente.

Possiamo quindi concludere — fermo restando quanto osservammo circa la classe sociale — che nei casi da noi osservati, le donne con

Tab, VIII d.

Corporatura	Età della sposa al matrimonio																								Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Snella	23	26	21	62	55	51	50	40	42	32	28	28	21	30	8	10	6	10	5	3	—	2	2	7	562
Regolare	17	36	27	75	55	58	44	46	48	30	33	27	20	23	11	11	7	10	4	2	3	4	3	10	604
Tozza	6	6	8	12	13	27	6	14	18	6	11	13	7	11	—	6	6	3	2	—	—	1	—	7	183
Totali . . .	46	68	56	149	123	136	100	100	108	68	72	68	48	64	19	27	19	23	11	5	3	7	5	24	1349

Tab. VIII p. v.

Corporatura	Età della sposa al matrimonio																								Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	38	+	
Snella	4,1	4,6	3,7	11 –	9,8	9,1	8,9	7,1	7,5	5,7	5 –	5 –	3,7	5,3	1,4	1,8	1,1	1,8	0,9	0,5	—	0,4	0,4	1,2	100
Regolare	2,8	6 –	4,5	12,4	9,1	9,6	7,3	7,6	7.9	5 –	5,5	4,5	3,3	3,8	1,8	1,8	1,2	1,6	0,7	0,3	0,5	0,7	0,5	1,7	100
Tozza	3,3	3,3	4,4	6,4	7,1	14,8	3,3	7,7	9,8	3,3	6 –	7,1	3,8	6 –	—	3,3	3,3	1,6	1,1	—	—	0,5	—	3,8	100

Tab. VIII p. v.

Corporatura	Età della sposa al matrimonio																								Totali
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Snella	50 –	38,2	37,5	41,6	44,7	37,5	50 –	40 –	38,9	47,1	38,9	41,2	43,7	46,9	42,1	37,1	31,6	43,5	45,4	60 –	—	28,6	40 –	29,2	41,6
Regolare	37 –	52,9	48,2	50,3	44,7	42,6	44 –	46 –	44,4	44,1	45,8	39,7	41,7	35,9	57,9	40,8	36,8	43,5	36,4	40 –	100	57,1	60 –	41,7	44,7
Tozza	13 –	8,8	14,3	8,1	10,6	19,9	6 –	14 –	16,7	8,8	15,3	19,1	14,6	17,2	—	22,3	31,6	13 –	18,2	—	—	14,3	—	29,2	13,6
Totali . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	104	100	—	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

corporatura tozza si trovano in netto svantaggio rispetto alle altre per le probabilità di contrarre matrimonio e l'età alle nozze. Rispetto a quest'ultima, poi, pare che vi sia un lievissimo vantaggio delle corporature regolari anche su le snelle.

Vediamo ora la prolificità: su di essa la corporatura influisce in modo alquanto diverso che non su la matrimonialità. L'indice di connessione è 0,117, notevolmente superiore, quindi, a quello per la matrimonialità.

Se noi osserviamo la Tab. III p. o., vediamo che le percentuali dei vari gradi di prolificità delle donne a corporatura regolare, con 3 o più figli, si mantengono sempre superiori a quelle delle altre due categorie. Anzi pure le spose con due soli figli costituiscono, nelle

TAB. III m.

Corporatura	Mumero medio dei figli avuti	
	dalle coniugate	dal complesso delle donne osservate
Snella	2,55	2,34
Regolare	3 —	2,72
Tozza	2,41	1,66
Media generale . . .	2,76	2,47

corporature regolari, una percentuale molto superiore (20,4 % invece del 14 %) che non nelle tozze. I casi di matrimoni sterili o con un solo figlio, invece, si presentano con una frequenza relativa molto maggiore (specialmente i casi di sterilità) per le corporature tozze o snelle, che non per le regolari.

La stessa cosa si vede agevolmente nella Tab. III p. v. osservandola, come al solito, orizzontalmente. La classe in cui le donne snelle sono, relativamente al totale, maggiormente rappresentate è quella dei due figli di cui tale categoria costituisce il 47,6 % (contro il 40,87 % nel totale). nelle categorie con un maggior numero di figli le snelle sono rappresentate sempre meno. Solo nelle classi estreme (10 o più figli) si nota una ripresa nella loro frequenza. Più accentuata ancora

Tab. XIII d.

Corporatura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Snella	57	34	50	45	48	39	28	29	23	21	20	15	17	5	5	9	7	5	6	4	8	475
Regolare	62	43	43	44	42	29	36	33	30	32	17	20	14	24	11	11	12	8	3	8	21	543
Tozza	23	13	13	12	10	14	15	6	9	5	6	5	—	6	1	1	—	2	—	2	2	145
Totali . . .	142	90	106	101	100	82	79	68	62	58	43	40	31	35	17	21	19	15	9	14	31	1163

Tab. XIII p. o.

Corporatura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Snella	12—	7,2	10,4	9,5	10,1	8,2	5,9	6,1	4,8	4,4	4,2	3,2	3,6	1,1	1,1	1,9	1,4	1,1	1,3	0,8	1,7	100
Regolare	11,4	7,9	7,9	8,1	7,7	5,3	6,6	6,1	5,5	5,9	3,1	3,7	2,6	4,4	2—	2—	2,2	1,5	0,6	1,5	3,9	100
Tozza	15,9	9—	9—	8,2	6,9	9,7	10,3	4,1	6,2	3,4	4,1	3,4	—	4,1	0,7	0,7	—	1,4	—	1,4	1,4	100

Tab. XIII p. v.

Corporatura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Snella	40,1	37,8	47,2	44,6	48—	47,6	35,4	42,6	37,1	36,2	46,5	37,5	54,8	14,3	29,4	42,9	36,8	33,3	66,7	28.6	25,8	40,8
Regolare	43,7	47,8	40,6	43,6	42—	35,4	45,6	48,5	48,3	55,2	39,5	50—	45,2	68,6	64,7	52,4	53,2	53,3	33,3	57,1	67,7	46,7
Tozza	16,2	14,4	12,3	11,9	10—	17,1	19—	8,8	14,5	8,6	14—	12,5	—	17,1	5,9	4,8	—	13,3	—	14,3	6,5	12,5
Totali . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

è la discesa delle percentuali delle donne tozze, che toccano il loro massimo (20,4 %) nei matrimoni sterili e che poi, al termine della loro progressiva discesa, presentano lo stesso fenomeno cui abbiamo accennato per le snelle. Le percentuali spettanti, nelle varie classi, a le corporature regolari vanno, invece, sempre aumentando con il crescere della prolificità, e da un minimo di 32,8 % nei matrimoni sterili, salgono fino 63,3 % nella classe dei 9 figli. Le due successive classi (10 e più figli) presentano percentuali inferiori. Questo comportamento delle varie categorie nelle classi di altissima prolificità, lascerebbe supporre che, nei casi in cui la donna possiede facoltà riproduttive così spiccate, la corporatura cessi di avere importanza

TAB. VIII m.

Corporatura	Età media al matrimonio
Snella	24,57
Regolare	24,27
Tozza	25,34
Media generale	24,34

ma noi preferiamo ritenere come accidentali tali risultati, dato il numero molto esiguo dei casi che figurano nelle classi estreme.

Del resto la Tab. III m. dà risultati abbastanza eloquenti: mentre il numero medio dei figli avuti da le donne con corporatura regolare è 3, tale numero medio scende a 2,55 per le donne con corporatura snella e a 2,41 per quelle con corporatura tozza. La differenza è troppo palese per lasciar sussistere dei dubbi: del resto è molto naturale pensare che le donne più atte a la riproduzione siano quelle le cui caratteristiche fisiche si staccano meno dal normale. *In medio stat virtus.*

Lo stesso si dica per la durata della convivenza feconda (Tab. XIII), per quanto l'indice di connessione (0,091) sia, in questo caso, leggermente minore che non per la prolificità.

Anche qui si può notare — Tab. XIII p. o. — che le percentuali spettanti alle convivenze feconde di durata superiore ai 7 anni, nella categoria delle corporature regolari, si mantengono generalmente inferiori a le corrispondenti percentuali delle altre due categorie, mentre, per le convivenze di durata inferiore, si verifica, in linea generale, il contrario. Le stesse constatazioni su l'andamento crescente e decrescente delle seriazioni (orizzontali) delle percentuali (verticali) che abbiamo fatto per le precedenti Tab. III p. v. e VIII p. v., si possono fare per la Tab. XIII p. v. dove tale fenomeno si mostra abbastanza regolare.

TAB. XIII m.

CORPORATURA	Durata media convivenza feconda
Snella	6,86
Regolare	7,84
Tozza	6,31
Media generale . . .	7,33

Del resto la dimostrazione più chiara è data, come sempre, da le medie. Infatti la durata media della convivenza feconda, che è di anni 7,84 per le donne con corporatura regolare, scende a 6,86 per le donne con corporatura snella e a 6,31 per le corporature tozze. La differenza è, come si vede, molto sensibile, e non fa che ribadire quanto abbiamo già esposto.

Si può quindi concludere che *ogni deviazione dal tipo regolare di corporatura influisce sfavorevolmente su la prolificità e su l'età al matrimonio; non però su la probabilità di contrarre matrimonio, che è massima per le corporature snelle. In ogni caso le corporature tozze si trovano in netto svantaggio anche rispetto a le snelle.*

§ 8. — La statura — Come influisce su la matrimonialità — Id. su la precocità del matrimonio — Id. su la prolificità. — Id. su la durata dell'attività generativa.

Di tutti i caratteri fin qui esaminati la statura è certo quello la cui influenza appare più discutibile e mal sicura, specialmente per quanto concerne la nuzialità.

Infatti, dei vari caratteri estetici, la statura è certamente il meno atto a determinare preferenze vere e proprie o, per lo meno, si comprende come si possa attribuirle minor importanza che non a la corporatura e, specialmente, a la bellezza. Ma noi pensiamo (e crediamo di esser nel vero) che l'incertezza dei nostri risultati in materia dipenda dall'esistenza — sia pur in misura ridotta — di una attrazione matrimoniale tra persone della medesima statura.

Tale attrazione produce una distribuzione regolare dei vari casi senza che sia possibile mostrare delle preferenze veramente accentuate. Se, tra i dati, avessimo avuto a nostra disposizione anche la statura dello sposo, avremmo potuto costruire delle tabelle parziali (una per ognuna delle tre categorie di statura dello sposo) che ci dessero la statura della sposa combinata con la sua età al matrimonio. Non sarebbe improbabile che le seriazioni delle età medie della sposa al matrimonio avessero presentato un minimo per le categorie di statura uguale a quella dello sposo. Ma queste, ben inteso, sono congetture, e ci rammarichiamo di non averne la riprova statistica.

Osserviamo, in ogni modo, le percentuali delle nubili nelle diverse categorie di statura. Da la Tab. VI p. o. vediamo che rimasero nubili il 10,3 % delle donne alte, l'8,5 % delle medie e il 13,1 % delle basse. Queste cifre darebbero nella matrimonialità — come per la corporatura — la superiorità alle donne con statura media; a queste seguirebbero le alte, mentre le basse sarebbero all'ultimo posto. Ma la differenza è, come si vede, molto piccola.

Del resto l'indice di connessione tra la statura e l'età al matrimonio è il più basso di tutti quelli trovati fino ad ora : 0,047. Nelle due tabelle corrispondenti (Tab. IX p. o. e Tab. IX p. v.) è estremamente difficile trovare una regolare differenza nell'andamento delle diverse categorie : convien attenersi esclusivamente a le età medie al matrimonio che sono, rispettivamente, di anni 24,4 per le alte, di 24,25 per le medie e di 24,81 per le basse. Anche qui, come notammo per le nubili, le donne basse si trovano in condizioni di inferiorità

TAB. IV d.

STATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Alta	58	77	90	130	83	57	26	17	10	6	3	3	1	561
Media	55	68	102	135	104	64	42	28	9	15	9	8	9	648
Bassa.	38	41	41	54	41	32	16	9	7	4	3	3	2	291
TOTALI . . .	151	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1.500

TAB. IV p. o.

STATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Alta	10,3	13,7	16 –	23,2	14,8	10,2	4,6	3 –	1,8	1,1	0,5	0,5	0,2	100
Media	8,5	10,5	15,7	20,8	16,1	9,9	6,5	4,3	1,4	2,3	1,4	1,2	1,4	100
Bassa.	13,1	14,1	14,1	18,6	14,1	11 –	5,5	3,1	2,4	1,4	1 –	1 –	0,7	100

TAB. IV p. v.

STATURA	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA												TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Alta	38,4	41,4	38,6	40,8	36,4	37,3	31 –	31,5	38,4	24 –	20 –	21,4	8,3	37,4
Media	36,4	36,6	43,8	42,3	45,6	41,8	50 –	51,9	34,6	60 –	60 –	57,1	75 –	43,2
Bassa.	25,2	22 –	17,6	16,9	18 –	20,9	19 –	16,7	26,9	16 –	20 –	21,4	16,7	19,4
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

rispetto al gusto maschile. Confessiamo che saremmo imbarazzatissimi se dovessimo dare una spiegazione assoluta di tale preferenza dovuta, secondo noi, in buona parte al caso.

L'indice di connessione della statura con la prolificità è alquanto superiore a quello con l'età al matrimonio: il suo valore è 0,092, superiore quindi a quello che trovammo per la bellezza. Non è, infatti, difficile immaginarsi che la statura influisca — attraverso una diversa conformazione della struttura fisica — su le possibilità riproduttive.

Mentre, da quanto abbiamo detto precedentemente, risultava che quelle che erano in condizioni di inferiorità per le probabilità di contrarre matrimonio erano le basse, vediamo che le alte sono le meno adatte a la funzione riproduttiva

TAB. IV m.

Statura	Numero medio dei figli avuti	
	dalle coniugate	dal complesso delle donne osservate
Alta	2,47	2,21
Media	2,97	2,72
Bassa.	2,76	2,33
Media generale . . .	2,76	2,47

Da la Tab. IV p. o. vediamo appunto come le percentuali della categoria della statura media si mantengano, per i matrimoni con due o più figli, quasi costantemente al di sopra di quelle che si riscontrano nelle altre due categorie. A loro volta, le percentuali dei matrimoni con 4 o più figli sono, per le stature alte, sempre superiori che per le stature basse.

Sufficientemente chiara (Tab. IV p. v.) è la tendenza a l'aumento delle percentuali date da le stature medie ai singoli gruppi, contro quella, nettamente decrescente, delle donne alte e quella, più incerta e press'a poco stazionaria, delle donne basse.

Le medie confermano quanto abbiamo detto: il numero medio

TAB. IX d.

STATURA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Alta	14	26	25	57	46	52	39	30	34	29	20	32	24	19	7	11	9	11	6	1	1	2	2	6	503
Media	23	29	14	69	56	61	46	48	52	28	40	23	14	34	8	13	6	9	4	4	1	3	2	6	593
Bassa	9	13	17	23	21	23	15	22	22	11	12	13	10	11	4	3	4	3	1	—	1	2	1	12	253
TOTALI . . .	46	68	56	149	123	136	100	100	108	68	72	68	48	64	19	27	19	23	11	5	3	7	5	24	1349

TAB. IX p. o.

STATURA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Alta.	2,8	5,2	5 –	11.3	9,1	10,3	7,6	6 –	6,8	5,8	4 –	6,4	4,8	3,8	1,4	2,2	1,8	2,2	1,2	0,2	0,2	0,4	0,4	1,2	100
Media	3,9	4,9	2,4	11,6	9,4	10,3	7,8	8,1	8,8	4,7	6,7	3,9	2,4	5,7	1,3	2,1	1 –	1,5	0,7	0,7	0,2	0,5	0,3	1 –	100
Bassa	3,6	5,1	6,7	9,1	8,3	9,1	5,9	8,7	8,7	4,3	4,7	5,1	4 –	4,3	1,6	1,2	1,6	1,2	0,4	—	0,4	0,8	0,4	4,7	100

TAB. IX p. v.

STATURA	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Alta.	30,4	38,2	44,6	38,3	37,4	39,1	39 –	30 –	31,5	42,6	27,8	47,1	50 –	29,7	36,8	40,7	47,4	47,8	54,5	20 –	33,3	28,6	40 –	25 –	37,1
Media	50 –	42,6	25 –	46,3	45,5	44,2	46 –	48 –	48,1	41,2	55,6	33,8	29,2	53,1	42,1	48,1	31,6	39,1	36,4	80 –	33,3	22,9	40 –	25 –	43,9
Bassa	19,6	19,1	30,4	15,4	17,1	16,8	15 –	22 –	20,4	16,2	16,7	19,1	20,8	17,2	21,1	11,1	21,1	13 –	9,1	—	33,3	28,6	20 –	50 –	18,8
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

dei figli per le coniugate di statura media è di 2,97; esso scende a 2,76 per quelle di statura bassa e ancora a 2,47 per quelle di statura alta.

La durata della convivenza feconda si comporta in maniera analoga. L'indice di connessione, infatti, è 0,059: si noti che per nessuno degli altri caratteri finora studiati si è verificata una differenza così forte tra i due indici della prolificità e della durata della convivenza feconda.

Tralasciamo le percentuali delle Tab. XIV p. o. e XIV p. v. che si prestano male a l'interpretazione, a causa di parecchie irregolarità nell'andamento, e occupiamoci solo delle medie della Tab. XIV m. La durata media della convivenza feconda delle donne con statura

TAB. IX m.

Statura	Età media al matrimonio
Alta	24,40
Media	24,25
Bassa	24,81
Media generale	24,34

bassa è di anni 7,28, quella delle stature medie 7,37. La superiorità delle medie sulle basse si trova quindi ridotta ad un valore minimo. In compenso è accresciuta (rispetto ai risultati della Tab. IV m.) quella su le alte, per le quali la durata media della convivenza feconda è di anni 6,59 solamente.

Di questa leggera discordanza che esiste tra la prolificità e la durata della attività generativa riguardo alla statura, non sappiamo dare spiegazione se non rinviando a considerazioni di ordine fisiologico che esulano dal nostro campo di studio.

Concludiamo che *le donne con stature medie sono le più prolifiche e hanno le maggiori probabilità di matrimonio: e che, dal confronto delle*

Tab. XIV d.

Statura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Alta	46	33	44	44	45	32	31	31	21	21	9	11	11	5	8	3	9	7	2	4	9	426
Media	68	40	45	42	43	32	28	26	29	28	27	17	16	21	7	13	6	6	4	6	20	524
Bassa	28	17	17	15	12	18	20	11	12	9	7	12	4	9	2	5	4	2	3	4	2	213
Totali	142	90	106	101	100	82	79	68	62	58	43	40	31	35	17	21	19	15	9	14	31	1163

Tab. XIV p. o.

Statura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Alta	10,8	7,7	10,3	10,3	10,6	7,5	7,3	7,3	4,9	4,9	2,1	2,6	2,6	1,2	1,9	0,7	2,1	1,6	0,5	0,9	2,1	100
Media	13–	7,6	8,6	8–	8,2	6,1	5,3	5–	5,5	5,3	5,2	3,2	3,1	4–	1,3	2,5	1,1	1,1	0,8	1,1	3,8	100
Bassa	13,1	8–	8–	7–	5,6	8,5	9,4	5,2	5,6	4,2	3,3	5,6	1,9	4,2	0,9	2,3	1,9	0,9	1,5	1,9	0,9	100

Tab. XIV p. v.

Statura	Durata della convivenza feconda (in anni)																					Totali
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Alta	32,4	36,7	41,5	43,6	45–	39–	39,2	45,6	33,9	36,2	20,9	27,5	35,5	14,3	47–	14,3	47,4	46,6	22,2	28,6	29–	36,6
Media	47,9	44,4	42,5	41,6	43–	39–	35,4	38,2	46,8	48,3	62,8	42,5	51,6	60–	41,2	61,9	31,6	40–	44,4	42,9	64,5	45–
Bassa	19,7	18,8	16–	14,9	12–	22–	25,3	16,2	19,3	15,5	16,3	30–	12,9	25,7	11,8	23,8	21,1	13,3	33,3	28,6	6,6	18,3
Totali	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

due rimanenti categorie, emerge che le basse sono più prolifiche mentre le alte sono più ricercate (in piccola misura) per il matrimonio.

TAB. XIV m.

Statura	Durata media convivenza feconda
Alta	6,79
Media	7,62
Bassa	7.36
Media generale . . .	7,33

9. — LE CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE — COME INFLUISCONO SU LA MATRIMONIALITÀ — ID. SU LA PRECOCITÀ DEL MATRIMONIO — ID. SU LA PROLIFICITÀ — ID. SU LA DURATA DELL'ATTIVITÀ GENERATIVA.

I risultati dell'indagine fatta su le caratteristiche particolari della toilette, se confermano quelli ottenuti per l'eleganza in generale, non coincidono però con essi.

Vediamo anzitutto con quali percentuali le nubili figurano nelle cinque categorie (Tab.V, p. o.).

Nella caratteristica *Trascurata* le nubili sono rappresentate con una percentuale (19,1 %) di gran lunga superiore che non ne le altre categorie. Le *Trascurate* si possono infatti, se vogliamo, far corrispondere a la categoria O dell'eleganza.

Dopo le *Trascurate*, la caratteristica in cui le nubili sono più largamente rappresentate è quella della toilette *accurata* (10,2 %). Va detto che la differenza tra questa e le categorie *Seria* e *Insignificante* (che sono, rispettivamente, l'8,7 % e il 9,6 %) è minima: in ogni modo questo farebbe pensare che se — tra le nubili — la maggior parte ha ben poca cura di se stessa, ve ne sono però anche parecchie altre che, per lo meno, cercano di « tenersi su ».

TAB. V d.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA													TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Trascurata	31	17	15	20	8	22	19	9	3	6	7	2	3	162
Seria	54	44	98	137	100	67	42	27	15	13	8	9	8	622
Insignificante	11	15	15	20	26	12	6	4	2	2	—	1	1	115
Accurata	46	78	87	107	67	38	11	11	3	2	—	1	—	451
Vistosa	9	32	18	35	27	14	6	3	3	2	—	1	—	150
TOTALI . . .	151	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1.500

TAB. V p. o.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA													TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Trascurata	19,1	10,5	9,3	12,3	4,9	13,6	11,7	5,6	1,9	3,7	4,3	1,2	1,9	100
Seria	8,7	7,1	15,7	22 –	16,1	10,8	6,7	4,3	2.4	2,1	2,1	1,4	0,5	100
Insignificante	9,6	13 –	13 –	17,4	22,6	10,4	5,2	3,5	1,7	1,7	—	0,9	0,9	100
Accurata	10,2	17,2	19,3	23,7	14,8	8,4	2,4	2,4	0,7	0,4	—	0,2	—	100
Vistosa	6 –	21,3	12 –	23,3	18 –	9,3	4 –	2 –	2 –	1,3	—	0,7	—	100

TAB. V p. v.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	Nubili	NUMERO DEI FIGLI AVUTI DA LA SPOSA													TOTALI
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
Trascurata	20,5	9.1	6,4	6,3	3,5	14,4	22,6	16,6	11,5	24 –	46,6	14,3	25 –	10,8
Seria	35,7	23,7	42 –	42,9	43,8	43,8	50 –	50 –	57,7	52 –	53,3	64,3	66,6	41,1
Insignificante	7,2	8,1	6,4	6,3	11,4	7,8	7,1	7,4	7,7	8 –	—	7,1	8,3	7,7
Accurata	30,5	42 –	37,4	33,5	29,4	24,8	13,1	20,4	11,5	8 –	—	7,1	—	30,2
Vistosa	6 –	17,2	7,7	11 –	11,8	9,1	7,1	5,6	11,5	8 –	—	7,1	—	10,1
TOTALI . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Scarse sono, invece, le nubili nella categoria *Vistosa,* e questo verrà reso più manifesto da l'osservazione delle varie età al matrimonio.

Per quanto concerne l'età al matrimonio ben poco risulta da le tabelle delle percentuali X p. o. e X p. v. e preferiano quindi attenerci esclusivamente a l'osservazione delle medie nella Tab. X m. Vediamo subito che la più bassa età media al matrimonio è quella delle donne con toilette *Vistosa* (23,9 anni). Si può supporre che l'inclinazione a vestirsi in maniera vistosa non sia disgiunta — anche se lo è dal buon gusto — da una certa originalità e vivacità di carattere che, a quanto pare, impressiona favorevolmente i candidati al matrimonio. Seguono,

Tab. V m.

Caratteristiche della toilette	Numero medio dei figli avuti	
	dalle coniugate	dal complesso delle donne osservate
Trascurata	3,84	3,10
Seria	3,09	2,82
Insignificante	2,75	2,48
Accurata	2,02	1,81
Vistosa	2,26	2,12
Media generale	2,76	2,47

immediatamente dopo, le donne con toilette *Trascurata,* che si sposano in media a 24 anni. Bisogna qui osservare che le donne con toilette *Trascurata* appartengono, in maggioranza, a le classi povere, nelle quali i matrimoni sono notoriamente più precoci: perchè se è vero che gli aggettivi che abbiamo scelto possono adattarsi a qualsiasi genere di toilette, è anche vero che l'aggettivo *Trascurata* è quello che meno ha queste possibilità di adattamento, come è vero che è questa una caratteristica che si riscontra maggiormente nelle classi dove più fanno difetto le risorse finanziarie e l'educazione. Se poi osserviamo la Tab. X, p. o., troviamo che questa categoria è pochissimo rappresentata nei casi di matrimoni molto tardivi. Questo (che concorre a spiegare la bassezza della età media al matrimonio) lascia

TAB. X d.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Trascurata	5	9	5	15	11	15	9	11	9	12	3	3	5	5	4	3	1	3	—	—	—	—	—	3	131
Seria	22	27	23	63	48	53	47	43	51	27	35	33	12	28	10	9	8	11	6	2	2	2	2	4	568
Insignificante	3	1	4	4	15	14	8	7	6	5	6	4	3	5	1	2	5	1	1	1	—	1	1	6	104
Accurata	11	19	16	54	39	37	26	24	31	17	23	25	22	20	4	9	4	6	3	1	1	3	1	9	405
Vistosa	5	12	8	13	10	17	10	15	11	7	5	3	6	6	—	4	1	2	1	1	—	1	1	2	141
TOTALI	46	68	56	149	123	136	100	100	108	68	72	68	48	64	19	27	19	23	11	5	3	7	5	24	1.349

TAB. X p. o.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Trascurata	3,8	6,9	3,8	11,5	8,4	11,5	6,9	8,4	6,9	9,1	2,3	2,3	3,8	3,8	3,1	2.3	0,8	2,3	—	—	—	—	—	2,3	100
Seria	3,9	4,8	4 –	11,1	8,4	9,3	8,3	7,6	9 –	4,7	6,1	5,8	2,1	4,9	1,8	1,6	1,4	1.9	1,1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,7	100
Insignificante	2,9	1 –	3,8	3,8	14,4	13,5	7,7	6,7	5,8	4,8	5,8	3,8	2,9	4,8	1 –	1,9	4,8	1 –	1 –	1 –	—	1 –	1 –	5,7	100
Accurata	2,9	4,7	4 –	13,3	9,6	9,1	6,4	5,9	7,7	4,2	5,7	6,2	5,4	4,9	1 –	2,2	1 –	1,5	0,7	0,2	0,2	0,7	0,2	2,2	100
Vistosa	3,5	8,5	5,7	9,2	7,1	12,1	7,1	10,6	7,8	5 –	3,5	2,1	4,3	4,3	—	2,8	0,7	1,4	0,7	0,7	—	0,7	0,7	1,4	100

TAB. X p. v.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	ETÀ DELLA SPOSA AL MATRIMONIO																								TOTALI
	—	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	+	
Trascurata	10,9	13,2	8,9	10,1	8,9	11 –	9 –	11 –	8,3	17.6	4,2	4,4	10,4	7,8	21,1	11,1	5,2	13 –	—	—	—	—	—	12,5	9,7
Seria	47,8	39,7	41,1	42,3	39 –	39 –	47 –	43 –	47,2	39,7	48,6	48,5	25 –	43,7	52,6	33,3	42,1	47,8	54,5	40 –	66,7	28,6	40 –	16,6	42 –
Insignificante	6,5	1,5	7,1	2,7	12,2	10,3	8 –	7 –	5,6	7,4	8,3	5,9	6,2	7,8	5,2	7,4	26,3	4,3	9,1	20 –	—	14,3	20 –	25 –	7,7
Accurata	23,9	27,9	28,6	36,2	31,7	27,1	26 –	24 –	28,7	25 –	31,9	36,8	45,8	31,2	21,1	33,3	21,1	26,1	27,3	20 –	33,3	42,9	20 –	37,5	30 –
Vistosa	10,9	17,7	14,3	8,7	8,1	12,5	10 –	15 –	10,1	10,3	6,9	4,4	12,5	9,4	—	14,8	5,2	8,7	9,1	20 –	—	14,2	20 –	8,4	10,4
TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

pensare che l'uomo, nei matrimoni tardivi, rifugga dalle donne che non cercano nemmeno di compensare l'avvenuta decadenza fisica con una certa cura della propria estetica.

La notevole frequenza relativa dei matrimoni tardivi nella categoria *Accurata*, la si può forse spiegare con l'influenza favorevole che tale caratteristica della toilette esercita su le probabilità di matrimonio; si può ritenere infatti che parecchi matrimoni tardivi, forse, non si sarebbero verificati se una minor cura di sé medesima, da parte della donna, non avesse supplito a le deficienze fisiche. Del resto vale anche qui quanto è stato detto circa la classe sociale.

Per le toilettes *Semplici* l'età media al matrimonio è poco dif-

TAB. X m.

Caratteristiche della toilette	Età media al matrimonio
Trascurata	24 —
Seria	24,3
Insignificante	25,8
Accurata	24,5
Vistosa	23,9
Media generale . . .	24,34

ferente da quelle già ricordate (24,3). Una netta differenza presentano invece le donne con toilettes *Insignificanti*, la loro età media al matrimonio è di 25,8 anni; anche da la Tab. X p. o. si vede abbastanza chiaramente come la categoria sia sufficientemente rappresentata nei casi di matrimoni molto tardivi. Confessiamo però di non saper dare alcuna spiegazione di questa avversione maschile verso le donne nelle cui toilettes non siamo stati capaci di riscontrare una speciale caratteristica: e la cosa appare tanto più strana in quanto ha solo un valore cronologico, dato che da la percentuale delle nubili (Tab. V p. o.) non si nota affatto questa differenza.

Vediamo ora la prolificità: qui i fenomeni sono più appariscenti e di più semplice interpretazione. Si osservi, anzitutto (Tab. V p. o.),

TAB. XV. d.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Trascurata	7	2	4	9	10	6	11	3	5	8	6	8	5	5	2	4	3	3	2	5	6	114
Seria	59	41	45	41	40	38	40	32	27	22	22	17	17	15	8	10	11	7	4	8	20	524
Insignificante	12	3	12	5	8	4	—	7	8	7	6	4	2	2	1	1	1	1	2	1	2	89
Accurata	56	34	32	39	32	26	20	19	13	17	5	6	6	10	4	1	4	1	—	—	2	327
Vistosa	8	10	13	7	10	8	8	7	9	4	4	5	1	3	2	5	—	3	1	—	1	109
TOTALI	142	90	106	101	100	82	79	68	62	58	43	40	31	35	17	21	19	15	9	14	31	1163

TAB. XV p. o.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Trascurata	6,1	1,8	3,5	7,9	8,8	5,3	9,6	2,6	4,4	7 –	5,3	7 –	4,4	4,4	1,8	3,5	2,6	2,6	1,8	4,4	5,3	100
Seria	11,3	7,8	8,6	7,8	7,6	7,3	7,6	6,1	5,2	4,2	4,2	3,2	3,3	2,9	1,5	1,9	2,1	1,3	0,8	1,5	3,8	100
Insignificante	13,5	3,4	13,5	5,6	9 –	4,5	—	7,9	9,–	7,9	6,7	4,5	2,2	2,2	1,1	1,1	1,1	1,1	2,2	1,1	2,2	100
Accurata	17,1	10,4	9,8	11,9	9,8	8 –	6,1	5,8	4 –	5,2	1,5	1,8	1,8	3,1	1,2	0,3	1,2	0,3	—	—	0,6	100
Vistosa	7,3	9,2	11,9	6,4	9,2	7,3	7,3	6,4	8,3	3,7	3,7	4,6	0,9	2,7	1,8	4,6	—	2,7	0,9	—	0,9	100

TAB. XV p. v.

CARATTERISTICHE DELLA TOILETTE	DURATA DELLA CONVIVENZA FECONDA (in anni)																					TOTALI
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	+	
Trascurata	4,9	2,2	3,8	8,9	40 –	7,3	13,9	4,4	8,1	13,8	14 –	20 –	16 –	14,3	11,8	19 –	15,8	20 –	22,2	35,7	19,4	9,8
Seria	41,6	45,6	42,4	40,6	40 –	46,3	50,6	47 –	43,5	37,9	51,1	42,5	54,8	42,9	47 –	47,6	57,9	46,7	44,4	57,1	64,5	45,1
Insignificante	8,5	3,3	11,3	5 –	8 –	4,9	—	10,3	12,9	12,1	14 –	10 –	6,5	5,7	5,9	4,8	5,3	6,7	22,2	7,1	6,4	7,7
Accurata	39,4	37,8	30,2	38,6	32 –	31,7	25,3	27,9	21 –	29,3	11,6	15 –	19,4	28,6	23,5	4,8	21.1	6,7	—	—	6,4	2,8
Vistosa	5,6	11,1	12,3	6,9	10 –	9,8	10,1	10,3	14,5	6,9	9,3	12,5	3,2	8,6	11,8	23,8	—	20 –	11,1	—	3,2	9.3
TOTALI	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

il gruppo delle sterili. Tale gruppo è rappresentato, nelle due categorie *Accurata* e *Vistosa* con delle percentuali (rispettivamente il 17,3 % e il 21,3 %) notevolmente superiori a quelle delle altre due categorie. Anzi è curioso notare che tale percentuale è, nelle toilettes *Semplici*, (7,1 %) inferiore anche a quella delle toilettes *Trascurate* (10,5 %), mentre ci si sarebbe forse potuto aspettare il contrario. Le toilettes *Semplici* rappresentano la parte più prolifica delle donne con eleganza 1 e 2: prima restavano nell'ombra perchè confuse con le altre su le quali l'eleganza esercitava i suoi effetti sfavorevoli alla prolificità. Ma tale differenza è largamente compensata nella successiva colonna delle donne con un sol figlio, dove la superiorità delle toilettes *Semplici*

TAB. XV m.

Caratteristiche della toilette	Durata media convivenza feconda
Trascurata	10 —
Seria	7,72
Insignificante	7,75
Accurata	6,57
Vistosa	7,25
Media generale . . .	7,53

su le *trascurate* è molto più notevole e pensiamo che la differenza notata sia dovuta più al caso che non a una effettiva maggior ripugnanza di tale categoria per le pratiche repressive della prole. Osserviamo, del resto, le medie: la fecondità più bassa è, di gran lunga, quella delle donne con toilette *Accurata*; appena 2,02 figli. Seguono, a breve distanza, le toilettes *Vistose* con una media di 2,26 figli: di queste parleremo più avanti. Più distanziate sono le toilettes *Insignificanti* con 2,75 figli: la scarsa prolificità di questa categoria si può spiegare in parte, con l'età media al matrimonio che è di oltre un anno e mezzo superiore a quella delle altre categorie. Questo è causa, naturalmente, di una minor prolificità, ma non in misura sufficiente a spiegare tale comportamento le cui ragioni, come quelle della loro tardività matrimoniale, ci sfuggono completamente. Il numero medio dei figli avuti da le donne con toilette *Semplici* fu di 3,09 e di 3,84 quello delle *Trascurate*. La fortissima superiorità di queste ultime su le rimanenti categorie ci sembra dimostrare l'influenza sfavorevole dell'eleganza su la prolificità.

Per quanto concerne le toilettes *Vistose*, notiamo (Tab. V p. o.) che se sono elevate le percentuali delle sterili e delle donne con 1 o 2 figli soltanto — non si può, d'altra parte, affermare recisamente che manchino i matrimoni con numerosa prole ; questi, infatti, vi figurano con percentuali maggiori che non nella categoria *Accurata*, contrariamente a quanto, forse, si sarebbe potuto supporre.

Questo fatto appare più manifesto nelle Tab. XV che ci danno la durata della convivenza feconda. Per brevità e per chiarezza ci soffermeremo solamente su la tabella delle medie, V. m. Essa mostra che la durata media della convivenza feconda è molto maggiore per le toilettes *Vistose* che non per le *Semplici* : (rispettivamente 7,25 anni, invece di 5,57). Anche le donne con toilettes *Insignificanti* presentano una piccola differenza : la durata media della loro convivenza feconda, è, rispettivamente, di 7,75 e di 7,55 anni. Per le *Trascurate* abbiamo invece ben 10 anni di convivenza feconda. La differenza è lampante e conferma pienamente quanto avemmo a dire e a ripetere : *l'eccessiva cura della propria eleganza, che avvantaggia di ben poco le probabilità di matrimonio, è invece il più forte degli ostacoli a la prolificità. È naturale che la prolificità possa influire a sua volta sull'eleganza cosicchè tra i due fenomeni esisterebbe un rapporto d'interdipendenza anzichè di causa e di effetto.*

§ 10. — La bellezza dello sposo e le sue relazioni con il numero dei figli avuti da la sposa — Condizioni per l'attendibilità dei risultati — L'omogamia tra individui aventi lo stesso aspetto fisico.

Più a titolo di curiosità che altro abbiamo voluto anche combinare la bellezza dello sposo con il numero dei figli avuti da la sposa. L'indice di connessione è tra questi due ordini di fenomeni, di 0,043 : inferiore, quindi, a tutti gli indici di connessione da noi riscontrati tra la fecondità e i vari caratteri. Pertanto l'andamento della Tab. XVI è estremamente confuso. Mentre da la Tab. XVI p. o., parrebbe che esistesse una lievissima superiorità fecondatrice degli uomini brutti sui

Tab. XVI d.

Bellezza dello sposo	Numero dei figli avuti da la sposa												Totali
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	21	23	23	25	16	16	5	5	1	3	2	1	141
1	82	94	136	80	66	32	21	8	14	6	4	3	546
2	61	91	134	93	53	28	23	9	9	3	6	6	516
3	22	25	26	30	18	8	5	4	1	3	2	2	146
Totali . . .	186	233	319	228	153	84	54	26	25	15	14	12	1.349

Tab. XVI p. o.

Bellezza dello sposo	Numero dei figli avuti da la sposa												Totali
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	14,9	16,3	16,3	17,7	11,3	11,3	3,6	3,6	0,7	2,1	1,4	0,7	100
1	15 –	17.2	24,9	14,7	12,1	5,9	3,8	1,5	2,5	1,1	0,7	0,6	100
2	11.8	17.6	25,9	18 –	10,3	5,4	4,5	1,7	1,7	0,6	1,2	1,2	100
3	15.1	17,1	17,8	20,5	12,3	5,5	3,4	2,7	0,7	2,1	1,4	1,4	100

Tab. XVI p. v.

Bellezza dello sposo	Numero dei figli avuti dalla sposa												Totali
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	+	
0	11,3	9,8	7,2	11 –	10,4	19 –	9,3	19,2	4 –	20 –	14,3	8,3	10,4
1	44,1	40,4	42,6	35 –	43,1	38,1	38,9	30,8	56 –	40 –	28,6	25 –	40,4
2	32,8	39 –	42 –	40,8	34,6	33,3	42,6	34,6	36 –	20 –	42,9	50 –	38,3
3	11,8	10,7	8,1	13,1	11,8	9,5	9,3	15,4	4 –	20 –	14,3	16,7	10,8
Totali . . .	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Tab. XVI m. o.

Bellezza dello sposo	Numero medio figli avuti
0	2,98
1	2,67
2	2,77
3	2,93
Media generale . . .	2,76

Tab. XVI m. v.

Numero figli avuti	Bellezza media dello sposo
0	1,45
1	1,51
2	1,51
3	1,56
4	1,48
5	1,33
6	1,52
7	1,50
8	1,40
9	1,40
10	1,71
+	1,75
Media generale . . .	1,48

Tab. XVI m′. v.

Numero figli avuti	Bellezza media dello sposo
0	1,45
1–3	1,52
4–7	1,45
8–+	1,53
Media generale . . .	1,48

belli, tale superiorità appare alquanto problematica se si osservano le tabelle delle medie (Tab. XVI m. v. Tab. XVI m. v. e Tab. XVI m. o.).

D'altra parte perchè tale indagine potesse avere effettivamente valore, andrebbe eseguita su uomini le cui mogli si trovassero nelle stesse condizioni, almeno di età. Questo, naturalmente porterebbe a un frazionamento che non ci è concesso di eseguire su i 1349 casi che abbiamo a nostra disposizione e non crediamo, quindi, di poter dare un giudizio sicuro su l'influenza della bellezza dello sposo sul numero dei figli.

Senza confronto più interessante è stato invece lo studio su l'attrazione matrimoniale in funzione dell'aspetto fisico (Tab. XVII).

Su tale tabella abbiamo calcolato gli indici di connessione e di correlazione, e l'indice di omofilia che era quello che meglio si prestava a tale scopo. Essi sono, rispettivamente, 0,204, + 0,243 e 0,407. L'attrazione è dunque abbastanza rilevante.

Infatti osservando le varie colonne de la Tab. XVII p. o., si nota che le maggiori percentuali sono quelle dei matrimoni tra individui di uguale aspetto fisico.

Anche le medie (Tab. XVII m. o. e XVII m. v.) hanno un andamento chiarissimo: la bellezza media della sposa, che è di 1,39 per gli uomini con aspetto fisico 0, sale fino a 2 per quelli con aspetto fisico 3; viceversa l'aspetto fisico medio dello sposo è di 1,19 per le donne con bellezza 0 e di 1,85 per quelle con bellezza 3.

Si conclude quindi che *esiste una notevole omogamia tra individui che hanno lo stesso grado di bellezza.*

* * *

Conclusioni.

Giunti così al termine di questa rapida rassegna dei risultati, ottenuti da l'esame dei casi da noi osservati, possiamo concludere che:

1) *l'eleganza del vestire e la cura della propria toilette sono legate alla prolificità da una notevole relazione negativa ed alla matrimonialità da una leggera relazione positiva; per la prima relazione si può ammettere un'influenza sfavorevole tanto dell'eleganza sulla prolificità, quanto della prolificità sull'eleganza; per la seconda relazione invece non sembra di poter ammettere che un'influenza favorevole dell'eleganza*

Tab. XVII d.

Bellezza dello sposo	Bellezza della sposa 0	1	2	3	Totali
0	21	57	50	13	141
1	44	237	214	51	546
2	23	148	267	78	516
3	8	31	59	48	146
Totali	96	473	590	190	1349

Tab. XVII p. o.

Bellezza dello sposo	Bellezza della sposa 0	1	2	3	Totali
0	14,9	40,4	35,5	9,2	100
1	8,1	43,4	39,2	9,3	100
2	4,5	28,7	51,7	15,1	100
3	5,5	21,1	40,5	32,9	100

Tab. XVII p. v.

Bellezza dello sposo	Bellezza della sposa 0	1	2	3	Totali
0	21,9	12 –	8,5	6,8	10,6
1	45,8	50,1	36,3	26,8	40,4
2	24 –	31,3	45,3	41,1	38,1
3	8,3	6,6	10 –	25,3	10,8
Totali	100	100	100	100	100

TAB. XVII m. o.

Bellezza dello sposo	Bellezza media della sposa
0	1,39
1	1,50
2	1,77
3	2 —
Media generale . . .	1,64

TAB. XVII m. v.

Bellezza della sposa	Bellezza media dello sposo
0	1,19
1	1,32
2	1,57
3	1,85
Media generale . . .	1,48

sulla matrimonialità analoga a quella già riscontrata sulla precocità del matrimonio ;

2) *la bellezza della sposa è legata da una lieve relazione negativa alla prolificità e da una notevole relazione positiva alla matrimonialità. Nel determinare la prima relazione, è possibile che intervenga tanto una influenza sfavorevole della bellezza sulla prolificità, quanto della prolificità sulla bellezza. Per la seconda relazione invece sembra ammissibile solo un'influenza favorevole della bellezza sulla probabilità di matrimonio ;*

3) *la regolarità della corporatura influisce favorevolmente su la prolificità e, in misura minore, su le probabilità di matrimonio ; nell'uno e nell'altro caso le corporature tozze sono in forte svantaggio rispetto a le snelle ;*

4) *la regolarità della statura influisce favorevolmente su la prolificità e, in misura minore, su le probabilità di matrimonio ; tra le alte e le basse, le prime hanno maggiori probabilità di matrimonio e le seconde sono più prolifiche ;*

5) *esiste una omogamia tra gli individui dello stesso grado di bellezza.*

M. J. VAN UVEN

Compensazione degli errori di un rapporto

Consideriamo alcune coppie di valori sperimentali (osservazioni): (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), e specialmente i loro rapporti

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1},\ m_2 = \frac{y_2}{x_2},\ \ldots,\ m_n = \frac{y_n}{x_n}.$$

Supponiamo che i valori teorici di questi rapporti siano uguali, o, almeno, che si voglia sapere il valore di m il più adatto alle osservazioni $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Allora si può scegliere tra diversi metodi di compensazione.

1. Dei rapporti $m_k = \dfrac{y_k}{x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ si prende la media aritmetica. Questo metodo esige che nessuno dei valori x_k sia zero, Di più: quando il valore x_k è piccolo, il suo errore ha un'influenza relativamente grande sul rapporto m_k.

2. Si passa dai numeri x_k, y_k ai loro logaritmi: $x'_k = {}^{10}\log x_k$, $y'_k = {}^{10}\log y_k$.

Allora, essendo $m'_k = {}^{10}\log m_k$, si ha:

$$m'_k = y'_k - x'_k,$$

e si tratta la compensazione degli errori di una differenza con i metodi abituali.

Tuttavia si deve fare attenzione ai pesi delle osservazioni, Essendo g_k il peso, e Δx_k l'errore di x_k, l'errore di x'_k $(= {}^{10}\log x_k)$ sarà

$$\Delta x'_k = \Delta^{10}\log x_k = 0{,}4343\ \Delta^{e}\log x_k = \frac{0{,}4343}{x_k} \cdot \Delta x_k\,;$$

dunque: tra gli errori medi di x_k e quelli di x'_k esiste la relazione $\varepsilon'_k = \frac{0{,}4343}{x_k} \varepsilon_k$; e, a causa della relazione tra i pesi e gli errori medi: $g_k \varepsilon_k^2 = g'_k \varepsilon'^2_k$, si trova $g'_k = \frac{x_k^2}{0{,}4343^2} \cdot g_k$, oppure, sopprimendo il fattore comune $\frac{1}{0{,}4343^2}$, $g'_k = g_k x_k^2$.

Anche questo metodo logaritmico va soggetto allo stesso inconveniente del metodo aritmetico, cioè che le variabili non possono assumere qualunque valore: tanto il valore zero quanto i valori negativi sono da escludere.

3. I due metodi menzionati, in un certo senso i più naturali, sono anzi molto pratici quando i valori m_k oscillano intorno ad un valore non molto diverso dall'unità. Tuttavia essi non sono sempre applicabili.

Perciò ci sia permesso richiamare l'attenzione su un terzo metodo, che si può adoperare per tutti i valori possibili delle osservazioni.

Per semplificare il calcolo ci limiteremo al caso in cui le osservazioni x_k, y_k coniugate abbiano lo stesso peso g_k; e per rendere l'esposizione del metodo più suggestiva ci serviremo di una rappresentazione geometrica.

Siano x_k, y_k le coordinate (cartesiane, ortogonali) di un punto P_k; allora il rapporto $m_k = \frac{y_k}{x_k}$ sarà il coefficiente angolare della retta OP_k, che lega P_k all'origine O.

Se tutte le osservazioni fossero esatte, tutti questi coefficienti angolari sarebbero uguali, e tutti i punti — quantunque sparsi — si troverebbero su una stessa retta (passante per O). Ora il problema di compensazione può esprimersi geometricamente così: Determinare la retta che passa per l'origine O e per quanto possibile per i punti P_k; il coefficiente angolare di questa retta sarà il valore migliore di m.

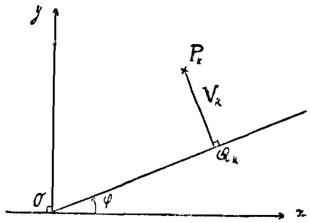
Le due coordinate x_k, y_k di P_k, avendo lo stesso peso (g_k), sono altrettanto scorrette.

Supporremo pure che x_k ed y_k siano osservazioni indipendenti tra loro.

Per ciò il principio di compensazione che noi assumeremo sarà:

che le distanze dai punti P_k alla retta richiesta siano le più piccole possibili.

Essendo φ l'angolo tra la retta e l'asse delle x, la distanza $V_k = Q_k P_k$ è



$$V_k = -x_k \operatorname{sen} \varphi + y_k \cos \varphi \text{ (peso } g_k). \quad (\text{I})$$

Nello spirito del metodo dei minimi quadrati si pretende che la somma dei quadrati delle distanze p o n d e r a t e V_k sia minima, ossia

$$[g\ V\ V] \text{ minimo,}$$

$[p]$, secondo il Gauss, rappresentando la somma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Ora

$$[g\ V\ V] = [g\ x\ x] \operatorname{sen}^2 \varphi - 2\,[g\ x\ y] \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + [g\ y\ y] \cos^2 \varphi =$$

$$= \frac{[g\,x\,x] + [g\,y\,y]}{2} - \frac{[g\,x\,x] - [g\,y\,y]}{2} \cos 2\,\varphi - [g\ x\ y] \operatorname{sen} 2\,\varphi.$$

Ponendo

$$\frac{[g\,x\,x] + [g\,y\,y]}{2} = S,\ \frac{[g\,x\,x] - [g\,y\,y]}{2} = R \cos 2\,\bar{\varphi},\ [g\,x\,y] = R \operatorname{sen} 2\,\bar{\varphi} \quad (2)$$

e convenendo che R sia un numero positivo, cosicchè $\cos 2\,\bar{\varphi}$ abbia lo stesso segno algebrico di $[g\ x\ x] - [g\ y\ y]$, $\operatorname{sen} 2\,\bar{\varphi}$ quello di $[g\ x\ y]$, otteniamo :

$$[g\ V\ V] = S - R \cos 2\,(\varphi - \bar{\varphi}). \quad (3)$$

Il valore minimo di $[g\ V\ V]$ è dunque fornito dall'angolo $\varphi = \bar{\varphi}$ determinato senza ambiguità da (2), e il valore richiesto di m sarà

$$\bar{m} = \operatorname{tang} \bar{\varphi}. \quad (4)$$

L'angolo $\bar{\varphi}$ vien derivato da

$$\operatorname{tang} 2\,\bar{\varphi} = \frac{2\,[g\ x\ y]}{[g\ x\ x] - [g\ y\ y]} \quad (5)$$

(avendo $\operatorname{sen} 2\,\bar{\varphi}$ il segno di $[g\ x\ y]$, $\cos 2\,\bar{\varphi}$ quello di $[g\ x\ x] - [g\ y\ y]$), e per R si ha

$$R = \frac{\text{I}}{2} \sqrt{([g\ x\ x] - [g\ y\ y])^2 + 4\,[g\ x\ y]^2}. \quad (6)$$

La retta $y = \overline{m}\, x$ sarà chiamata la retta « probabile ».

Indicando la distanza da P_k alla retta probabile con U_k, abbiamo

$$U_k = -x_k \operatorname{sen} \overline{\varphi} + y_k \cos \overline{\varphi} \,. \tag{7}$$

Per ciò si ricava da (3)

$$[g\, U\, U] = S - R \,, \tag{8}$$

che è il valore minimo di $[g\, V\, V]$.

Cerchiamo adesso l'errore medio dell'angolo « probabile » $\overline{\varphi}$. Da (2) segue

$$\cos 2\,\overline{\varphi} \,.\, \Delta R - 2\, R \operatorname{sen} 2\,\overline{\varphi} \,.\, \Delta\, \overline{\varphi} = [g\, x\, \Delta\, x] - [g\, y\, \Delta\, y] \,,$$

$$\operatorname{sen} 2\,\overline{\varphi} \,.\, \Delta R + 2\, R \cos 2\,\overline{\varphi} \,.\, \Delta\, \overline{\varphi} = [g\, y\, \Delta\, x] + [g\, x\, \Delta\, y] \,.$$

Moltiplicando queste equazioni per sen $2\,\overline{\varphi}$ e cos $2\,\overline{\varphi}$, e sottraendo, si trova:

$$2\, R . \Delta\, \overline{\varphi} = \{ -[g\, x\, \Delta\, x] + [g\, y\, \Delta\, y] \} \operatorname{sen} 2\,\overline{\varphi} + \{ [g\, y\, \Delta\, x] + $$
$$+ [g\, x\, \Delta\, y] \} \cos 2\,\overline{\varphi}.$$

Siano $\Delta\, x_k = \xi_k$, $\Delta\, y_k = \eta_k$, $\Delta\, \overline{\varphi} = \tau$ (espresso in radianti) gli errori veri di x_k, y_k, $\overline{\varphi}$, ed indichiamo i valori veri di x_k, y_k, $\overline{\varphi}$, R con $\hat{x}_k$, $\hat{y}_k$, $\hat{\varphi}$, $\hat{R}$; allora l'equazione precedente, applicata al caso che gli scostamenti $\Delta\, x_k$, $\Delta\, y_k$, $\Delta\, \overline{\varphi}$ siano gli errori veri, fornisce:

$$2\, \hat{R} \tau = \{ -[y\, \hat{x}\, \xi] + [g\, \hat{y}\, \eta] \} \operatorname{sen} 2\,\hat{\varphi} + \{ [g\, \hat{y}\, \xi] + [g\, \hat{x}\, \eta] \} \cos 2\,\hat{\varphi} \,.$$

Quadrando e prendendo la media vera (estratta da una serie infinita ideale di serie di osservazioni), che sarà indicata con $M\,(\tau\tau)$, risp. $M\,(\xi\xi)$, ecc., si ottiene

$$4\, \hat{R}^2\, M\, (\tau\, \tau) =$$
$$= \{ M\, ([g\, \hat{x}\, \xi]^2) - 2\, M\, ([g\, \hat{x}\, \xi]\, [g\, \hat{y}\, \eta]) + M\, ([g\, \hat{y}\, \eta]^2) \} \operatorname{sen}^2 2\,\hat{\varphi} +$$
$$+ 2 \{ -M\, ([g\, \hat{x}\, \xi]\, [g\, \hat{y}\, \xi]) - M\, ([g\, \hat{x}\, \xi]\, [g\, \hat{x}\, \eta]) + M\, ([g\, \hat{y}\, \eta]\, [g\, \hat{y}\, \xi]) +$$
$$+ M\, ([g\, \hat{y}\, \eta]\, [g\, \hat{x}\, \eta] \} \operatorname{sen} 2\,\hat{\varphi} \cos 2\hat{\varphi} +$$
$$+ \{ M\, ([g\, \hat{y}\, \xi]^2) + 2\, M\, ([g\, \hat{y}\, \xi]\, [g\, \hat{x}\, \eta]) + M\, ([g\, \hat{x}\, \eta]^2) \} \cos^2 2\,\hat{\varphi}. \tag{9}$$

Nella riduzione delle espressioni $M\,([g\, \hat{x}\, \xi]^2)$, $M\,([g\, \hat{x}\, \xi]\, [g\, \hat{y}\, \eta])$, ecc., incontriamo le somme (medie vere) $M\,(\xi_k\, \xi_k)$, $M\,(\xi_k\, \xi_l)$, $M\,(\xi_k\, \eta_k)$, $M\,(\xi_k\, \eta_l)$, $M\,(\eta_k\, \eta_k)$, $M\,(\eta_k\, \eta_l)$.

Indicando con σ_o l'errore medio dell'unità di peso, e considerando che x_k ed y_k hanno lo stesso peso g_k, si trova dapprima:

$$M\ (\xi_k\ \xi_k) = M\ (\eta_k\ \eta_k) = \frac{\sigma_o^2}{g_k}.$$

D'altra parte, l'osservazione x_k essendo indipendente dalle osservazioni x_l $(l \neq k)$, y_l, e — secondo il convenuto — pure da y_k, si ha:

$M\ (\xi_k\ \xi_l) = o$, $M\ (\xi_k\ \eta_l) = o$, $M\ (\xi_k\ \eta_k) = o$, e parimenti $M\ (\eta_k\ \eta_l) = o$.

Perciò si ottiene

$$\begin{aligned} M\ ([g\ \hat{x}\ \xi]^2) &= M\ ([g_k^2\ \hat{x}_k^2\ \xi_k \xi_k]) + M\ (\underset{l \neq k}{[[}\ g_k\ g_l\ \hat{x}_k\ \hat{x}_l\ \xi_k\ \xi_l]]) = \\ &= [g_k^2\ \hat{x}_k^2\ M\ (\xi_k\ \xi_k)] + \underset{l \neq k}{[[}g_k\ g_l\ \hat{x}_k\ \hat{x}_l\ M\ (\xi_k\ \xi_l)]] = \\ &= [g_k^2\ \hat{x}_k^2 . \frac{\sigma_o^2}{g_k}] + o = [g_k\ \hat{x}_k^2]\ \sigma_o^2 = [g\ \hat{x}\ \hat{x}]\ \sigma_o^2. \end{aligned}$$

Analogamente

$$M\ ([g\ \hat{x}\ \xi]\ [g\ \hat{y}\ \eta]) = o\ ,\ M\ ([g\ y\ \eta]^2) = [g\ \hat{y}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2\ ;$$

$$M\ ([g\ \hat{x}\ \xi]\ [g\ \hat{y}\ \xi]) = [g\ \hat{x}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2\ ,\ M\ ([g\ \hat{x}\ \xi]\ [g\ \hat{x}\ \eta]) = o\ ,$$

$$M\ ([g\ \hat{y}\ \eta]\ [g\ \hat{y}\ \xi]) = o\ ,\ M\ ([g\ \hat{y}\ \eta]\ [g\ \hat{x}\ \eta]) = [g\ \hat{x}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2\ ;$$

$$\begin{aligned} M\ ([g\,\hat{y}\,\xi]^2) = [g\,\hat{y}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2\ ,\ M\ ([g\,\hat{y}\,\xi]\ [g\ \hat{x}\ \eta] = o\ ,\ M\ ([g\ \hat{x}\,\eta]^2) = \\ = [g\ \hat{x}\ \hat{x}]\ \sigma_o^2. \end{aligned}$$

Così l'equazione (9) può essere semplificata:

$$\begin{aligned} 4\ \hat{R}^2\ M\ (\tau\ \tau) = \{[g\ \hat{x}\ \hat{x}]\ \sigma_o^2 - o + [g\ \hat{y}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2\}\ \text{sen}^2\ 2\ \hat{\varphi}\ + \\ + 2\ \{-[g\,\hat{x}\,\hat{y}]\ \sigma_o^2 - o + o + [g\,\hat{x}\,\hat{y}]\}\ \text{sen}\ 2\,\hat{\varphi}\ \cos\ 2\,\hat{\varphi}\ + \\ + \{[g\ \hat{y}\ \hat{y}]\ \sigma_o^2 + o + [g\ \hat{x}\ \hat{x}]\ \sigma_o^2\}\ \cos^2\ 2\ \hat{\varphi}\ , \end{aligned}$$

ovvero

$$4\ \hat{R}^2\ M\ (\tau\ \tau) = \{[g\ \hat{x}\ \hat{x}] + [g\ \hat{y}\ \hat{y}]\}\ \sigma_o^2 = 2\ \hat{S}\ \sigma_o^2.$$

Ora $M\ (\tau\ \tau)$ è il quadrato dell'errore medio vero $\sigma_{\overline{\varphi}}$ di $\overline{\varphi}$; dunque

$$\sigma_{\overline{\varphi}}^2 = \frac{\hat{S}}{2\ \hat{R}^2}\ \sigma_o^2\ . \qquad (10)$$

Si tratta adesso di ottenere il valore di σ_0^2.

Prendendo per la retta $y = m\, x$ la retta vera $y = \hat{m}\, x = \tan \hat{\varphi} \,.\, x$, e denotando le distanze dei punti P_k ad essa con T_k, l'equazione (3) si trasforma nella:

$$[g\, T\, T) = S - R \cos 2\, (\hat{\varphi} - \overline{\varphi}) = S - R \cos 2\, \tau = S - R + 2\, R\, \mathrm{sen}^2\, \tau = [g\, U\, U] + 2\, R\, \mathrm{sen}^2\, \tau\,.$$

Le media vera di queste espressioni è quindi:

$$M\, ([g\, T\, T]) = M\, ([g\, U\, U]) + 2\, \hat{R}\, M\, (\mathrm{sen}^2\, \tau)\,. \tag{11}$$

La posizione vera $\hat{P}_k$ del punto P_k (colle coordinate $\hat{x}_k\,,\,\hat{y}_k$) deve naturalmente trovarsi sulla retta vera; dunque

$$0 = -\,\hat{x}_k\, \mathrm{sen}\, \hat{\varphi} + \hat{y}_k \cos \hat{\varphi}\,. \tag{12}$$

La distanza T_k dal punto «osservato» P_k alla retta vera vale $T_k = -\, x_k\, \mathrm{sen}\, \hat{\varphi} + y_k \cos \hat{\varphi} = -\, (\hat{x}_k + \xi_k)\, \mathrm{sen}\, \hat{\varphi} + (\hat{y}_k + \eta_k) \cos \hat{\varphi}$, o, usando la (12),

$$T_k = -\, \xi_k\, \mathrm{sen}\, \hat{\varphi} + \eta_k \cos \hat{\varphi}\,,$$

donde

$$[g\, T\, T] = [g\, \xi\, \xi]\, \mathrm{sen}^2\, \hat{\varphi} - 2\, [g\, \xi\, \eta]\, \mathrm{sen}\, \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi} + [g\, \eta\, \eta] \cos^2 \hat{\varphi}\,.$$

Poichè

$$M\, ([g\, \xi\, \xi]) = [g_k\, M\, (\xi_k\, \xi_k)] = g_1\, M\, (\xi_1\, \xi_1) + \ldots + g_n\, M\, (\xi_n\, \xi_n) = g_1 \cdot \frac{\sigma_0^2}{g_1} + \ldots + g_n \cdot \frac{\sigma_0^2}{g_n} = n\, \sigma_0^2\,,$$

$$M\, ([g\, \xi\, \eta]) = [g_k\, M\, (\xi_k\, \eta_k)] = 0\,,\quad M\, ([g\, \eta\, \eta]) = [g_k\, M\, (\eta_k\, \eta_k)] = [g_k \cdot \frac{\sigma_0^2}{g_k}] = n\, \sigma_0^2,$$

dall'equazione precedente si deduce:

$$M\, ([g\, T\, T]) = n\, \sigma_0^2. \tag{13}$$

Ammettendo che l'errore vero τ dell'angolo probabile $\overline{\varphi}$ sia piccolissimo, è lecito scrivere:

$$M\, (\mathrm{sen}^2\, \tau) \simeq M\, (\tau\, \tau) = \sigma_{\overline{\varphi}}^2 = \frac{\hat{S}}{2\, \hat{R}^2}\, \sigma_0^2\,,$$

ove $\simeq$ ha il solito significato di «presso a poco uguale a».

Allora l'equazione (11) può ridursi a

$$n\,\sigma_0^2 \simeq M\,([g\,U\,U]) + 2\,\hat{R}\,.\,\frac{\hat{S}}{2\,\hat{R}^2}\,.\,\sigma_0^2 = M\,([g\,U\,U]) + \frac{\hat{S}}{\hat{R}}\,\sigma_0^2\,.$$

Poichè i valori « veri » $M\,([g\,U\,U])$, $\hat{R}$, $\hat{S}$ sono effettivamente sconosciuti, prendiamo al loro posto, stimandoli approssimativamente, i valori sperimentali $[g\,U\,U]$, R, S (gli unici che sono a nostra disposizione) ; così l'equazione precedente fornisce

$$\sigma_0^2 \simeq \frac{[g\,U\,U]}{n - \dfrac{S}{R}} = \frac{[g\,U\,U]}{n - 1 - \dfrac{S-R}{R}} = \frac{S-R}{n - 1 - \dfrac{S-R}{R}}\,. \tag{14}$$

Dalle (10) e (14) si trova per l'errore medio dell'angolo probabile $\overline{\varphi}$:

$$\sigma_{\overline{\varphi}}^2 \simeq \frac{S}{2\,R^2}\cdot\frac{S-R}{n - 1 - \dfrac{S-R}{R}}\,. \tag{15}$$

Passando dall'angolo $\overline{\varphi}$ alla tangente $\overline{m} = \operatorname{tang}\overline{\varphi}$, la formola differenziale

$$\Delta\,\overline{m} = \Delta\,\operatorname{tang}\overline{\varphi} = \sec^2\overline{\varphi}\,.\,\Delta\,\overline{\varphi}\,,$$

applicata agli errori veri μ e τ di $\overline{m}$ e $\overline{\varphi}$, ci dà

$$\mu = \sec^2\overline{\varphi}\,.\,\tau\,;$$

perciò, prendendone il quadrato medio vero,

$$\sigma_{\overline{m}}^2 = \sec^4\hat{\varphi}\,.\,\sigma_{\overline{\varphi}}^2 \simeq \sec^4\overline{\varphi}\,.\,\frac{S}{2\,R^2}\cdot\frac{S-R}{n - 1 - \dfrac{S-R}{R}}\,,$$

ossia

$$\sigma_{\overline{m}} \simeq \frac{1}{R\cos^2\overline{\varphi}}\cdot\sqrt{\frac{S\,(S-R)}{2\left(n - 1 - \dfrac{S-R}{R}\right)}}\,, \tag{16}$$

nella quale è da notarsi che spesso la frazione $\dfrac{S-R}{R}$ sarà trascurabile di fronte a $n-1$.

Il problema di compensazione che ci eravamo proposto è dunque stato risolto:

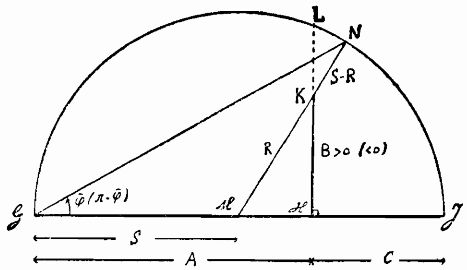
1) quanto al rapporto m, dalle equazioni (4) e (5),

2) quanto al suo errore medio, dalle equazioni (16), (2), (5).

Nel caso $n = 1$ si ha $U_1 = 0$, donde $[g\, U\, U] = S - R = 0$, e perciò la formola (16) dà un valore indeterminato per $\sigma_{\overline{m}}$, come era prevedibile.

Le quantità S, R possono rappresentarsi geometricamente in un modo molto semplice.

Ponendo $A = [g\, x\, x]$, $B = [g\, x\, y]$, $C = [g\, y\, y]$, costruiamo tre segmenti di lunghezze A, B, C; prolunghiamo poi $G\,H = A$ di $H\,J = C$, conduciamo nel punto H la perpendicolare $H\,K = B$, e tracciamo la semicirconferenza avente $G\,J$ per diametro. Il raggio per K abbia come estremo il punto N.



Allora il raggio del cerchio vale $\dfrac{A + C}{2} = S$, la distanza $M\,H$ di H dal centro M (misurata da M nella direzione di J), vale $\dfrac{A - C}{2}$;

dunque $M\,K = \sqrt{\left(\dfrac{A - C}{2}\right)^2 + B^2} = R$, e $K\,N = S - R$. Di più

nel caso $B > 0$: $\sphericalangle J\,M\,N = 2\,\bar{\varphi}$ e $\sphericalangle J\,G\,N = \bar{\varphi}$;

nel caso $B < 0$: $\sphericalangle J\,M\,N = 2\,\pi - 2\,\bar{\varphi}$ e $\sphericalangle J\,G\,N = \pi - \bar{\varphi}$.

A causa di $A\,C - B^2 = [g\,x\,x]\,[g\,y\,y] - [g\,x\,y]^2 \equiv [[g_k\, g_l\, (x_k\, y_l - x_l\, y_k)^2]] > 0$, si ha $H\,L > H\,K$; cioè il punto K è necessariamente situato e n t r o il cerchio. Del resto, già dalla relazione $[g\, U\, U] = S - R$ è evidente che $S - R > 0$, quindi $M\,N > M\,K$.

Se tutti i punti P_k sono quasi allineati con O, la quantità $S - R$ è insignificante rispetto ad S ed R. La quantità R si deve allora calcolare mediante la formola (6), perchè si ottenga un valore preciso con un numero sufficiente di cifre significative. Calcolando R da

$R = \dfrac{B}{\text{sen } 2\,\overline{\varphi}}$, o da $R = \dfrac{\frac{1}{2}(A - C)}{\cos 2\,\overline{\varphi}}$ mediante logaritmi, il più delle volte si avrebbe bisogno di una tavola di logaritmi almeno a 7 decimali, per ottenere $S - R$ con una precisione di 1 %.

Terminiamo con qualche esempio :

Primo esempio.

x	y	g	xx	xy	yy	gxx	gxy	gyy
28,5	30,2	2	812,25	860,70	912,04	1624,50	1721,40	1824,08
26,7	28,3	3	712,89	755,61	800,89	2138,67	2266,83	2402,67
29,2	30,7	1	852,64	896,44	942,49	852,64	896,44	942,49
25,4	27,1	2	645,16	688,34	734,41	1290,32	1376,68	1468,82
27,3	28,9	2	745,29	788,97	835,21	1490,58	1577,94	1670,42
$n = 5$						7396,71	7839,29	8308,48

$A = [g\,x\,x] \quad = \quad 7396,71 \qquad S = \dfrac{A + C}{2} = 7852,595$

$C = [g\,y\,y] \quad = \quad 8308,48 \qquad 4\,R^2 = (A - C)^2 + 4\,B^2 = (-911,77)^2 + 15678,58^2 =$

$A + C = \quad = 15705,19 \qquad = 831324,5329 + 245817970,8164 =$

$= 246649195,3493$

$A - C = \quad = -\,911,77 \qquad 2\,R = 15705,06910$

$2\,B = 2[g\,x\,y] = \; 15678,58 \qquad R = 7852,53455 \qquad R - S = 0,06045\,,\; \dfrac{S - R}{R}$ trascurabile.

$\log(A - C) = {}^{n}2,95988$

$\log 2\,B = \; 4,19531$

$\log \cot 2\,\overline{\varphi} = {}^{n}8,76457$

$= \log\{-\text{tang}\,(2\,\overline{\varphi} - 90^\circ)\}$

$\log(S - R) = 8,78140$

$\log S = 3,89501$

$-\log 2\,(n - 1) = 9,09691$

$1,77332$

$\log \cos \overline{\varphi} = 9,83650$

$\log \cos^2 \overline{\varphi} = 9,67300$

$\log R = 3,89501$

$\log R \cos^2 \overline{\varphi} = 3,56801$

$2\,\overline{\varphi} - 90^\circ = 3^\circ 19' 41'' +$

$\overline{\varphi} - 45^\circ = 1^\circ 39' 51''$

$\overline{\varphi} = 46^\circ 39' 51''$

$\log \sqrt{\dfrac{S\,(S - R)}{2\,(n - 1)}} = 0,88666$

$\log R \cos^2 \overline{\varphi} = 3,56801$

$\log \sigma_{\overline{m}} = 7,31865 \qquad \sigma_{\overline{m}} = 0,00208$

$\log \text{tang}\,\overline{\varphi} = 0,02523\,,\; \overline{m} = \text{tang}\,\varphi = 1,0598$

dunque $\overline{m} = 1,0598 \pm 0,0021$
oppure, arrotondando,
$\overline{m} = \; 1,060 \pm 0,002\,.$

Secondo esempio.

x	y	g	gxx	gxy	gyy
$+1,1$	$+1,0$	1	1,21	$+1,10$	1,00
$+0,9$	$+0,6$	1	0,81	$+0,54$	0,36
$+0,7$	$+0,5$	1	0,49	$+0,35$	0,25
$+0,2$	$+0,2$	1	0,04	$+0,04$	0,04
$+0,1$	$-0,2$	1	0,01	$-0,02$	0,04
0	$-0,2$	1	0	0	0,04
$-0,3$	$+0,1$	1	0.09	$-0,03$	0,01
$-0,4$	$-0,2$	1	0,16	$+0,08$	0,04
$-0,5$	$-0,4$	1	0,25	$+0,20$	0,16
$-0,8$	$-0,6$	1	0,64	$+0,48$	0,36
$n = 10$			3,70	$+2,74$	2,30

$$\left\{\begin{array}{l} A = [g\,x\,x] = 3{,}70\,,\ B = [g\,x\,y] = 2{,}74\,, \\ C = [g\,y\,y] = 2{,}30 \\ A + C = 6{,}00\,,\ A - C = 1{,}40 \\ R^2 = 0{,}4900 + 7{,}5076 = 7{,}9976 \\ S = 3{,}00\,,\ \dfrac{A-C}{2} = 0{,}70 \\ R = 2{,}82800\,,\ S - R = 0{,}17200 \end{array}\right.$$

$$\cot 2\bar{\varphi} = \frac{0{,}70}{2{,}74}$$

$$\log 0{,}70 = 9{,}84510$$

$$\log 2{,}74 = 0{,}43775$$

$$\log \cot 2\bar{\varphi} = 9{,}40735$$

$$2\bar{\varphi} = 75°40'8''$$

$$\bar{\varphi} = 37°50'4''$$

$$\log \operatorname{tang} \bar{\varphi} = 9{,}89022 = \log \bar{m} \qquad \bar{m} = 0{,}77664$$

$$\log \cos \bar{\varphi} = 9{,}89751$$

$$\log \cos \bar{\varphi} = 9{,}89751$$

$$\log \cos^2 \bar{\varphi} = 9{,}79502$$

$$\log R = 0{,}45148$$

$$\log R \cos^2 \bar{\varphi} = 0{,}24650$$

$$\log (S - R) = 9{,}23533$$

$$\log R = 0{,}45148$$

$$8{,}78385$$

$$\frac{S-R}{R} = 0{,}0608$$

$$n - 1 - \frac{S-R}{R} = 9 - 0{,}0608 = 8{,}9392$$

$$\log\left(n - 1 - \frac{S-R}{R}\right) = 0{,}95730$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log 2\left(n - 1 - \frac{S-R}{R}\right) = 1{,}25833$$

$$\log S = 0{,}47712$$

$$\log (S - R) = 9{,}23533$$

$$\log \frac{1}{2\left(n - 1 - \dfrac{S-R}{R}\right)} = 8{,}74167$$

$$8{,}45412$$

$$\log \sqrt{\frac{S\,(S-R)}{2\left(n - 1 - \dfrac{S-R}{R}\right)}} = 9{,}22706$$

$$\log R \cos^2 \bar{\varphi} = 0{,}24650$$

$$\log \sigma_{\bar{m}} = 8{,}98056$$

$$\sigma_{\bar{m}} = 0{,}09562$$

dunque

$$\bar{m} = 0{,}777 \pm 0{,}096$$

oppure, arrotondando,

$$\bar{m} = 0{,}78 \pm 0{,}10\,.$$